



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Richard Weber
Auxiliares: Blas Duarte
Sebastián Guzmán
Marianela Pereira

EXAMEN IN34A Semestre Primavera 2004

Pregunta 1 (35%)

- 1- Explicar qué significa que un problema de decisión pertenezca a P, qué significa que un problema de decisión pertenezca a NP y qué significa que un problema de decisión pertenezca a NP-completo. (1,5 pts.)

Pauta:

- Un problema de decisión está en P si existe un algoritmo polinomial que lo resuelva. (0,5)
- Un problema de decisión está en NP si existe un algoritmo no-determinístico polinomial que lo resuelva (o si existe un certificado polinomial para una instancia de SI del problema). (0,5)
- Un problema de decisión está en NP-completo si está en NP y todo problema en NP es polinomialmente reducible en él. (0,5)

- 2- Sea el siguiente problema de minimización

$$\begin{array}{ll} \text{Min } f(x) \\ \text{s.a. } g_i(x) \leq 0 & \text{para todo } i \end{array}$$

- a) Describa las condiciones necesarias para que un punto x regular sea mínimo local. (0,75)
- b) Describa las condiciones suficientes para que un punto x sea mínimo global. (0,75)

a) x debe cumplir con las condiciones de Kuhn-Tucker.

b) x debe cumplir con las condiciones de Kuhn-Tucker y además f y g_i deben ser C1 y convexas.

- 3- Sea el problema de Programación Lineal en forma estándar

- a) Enuncie el problema auxiliar que se formula para encontrar una solución factible inicial del PL original. (0,75)
- b) Demuestre que el PL original tiene solución factible si y sólo si el óptimo del problema auxiliar es 0. (0,75)

a) Escribir el Problema de Fase I del Simplex.

b) Ver la demostración en los apuntes del curso.

- 4- Explique en qué casos se decide no ramificar un nodo en el algoritmo de Branch and Bound utilizado para resolver un problema de programación entera.

Pauta:

En 3 casos: si el problema de ese nodo es infactible, si el problema de ese nodo tiene solución entera, o si el problema de ese nodo tiene una solución fraccionaria “peor” que alguna entera ya conocida. (0,5 cada condición).

Pregunta 2 (35%)

La Asociación Nacional de Fútbol Profesional (ANFP) ha decidido contratar a dos prestigiosos consultores italianos en optimización, Alessandro Cassado y Paolo Reinetta, a fin de que mediante la utilización de modelos matemáticos diseñen el fixture (programa de enfrentamientos entre los equipos a lo largo del torneo) del Campeonato Apertura del fútbol chileno 2005.

Los datos que les hizo llegar la ANFP son los siguientes:

- Disputarán el campeonato 20 equipos que se enfrentarán todos contra todos a lo largo de 19 fechas. Cada fecha consta de 10 partidos donde juegan los 20 equipos del torneo, y cada enfrentamiento entre dos equipos se da exactamente una vez a lo largo del campeonato.
- Cada equipo debe jugar 9 o 10 partidos en condición de local (y el resto de sus partidos en condición de visita).
- Cada equipo puede jugar a lo más 2 partidos consecutivos como local y 2 partidos consecutivos como visita.
- Cuando la Universidad de Chile juega de local, el Colo-Colo debe jugar como visita, y viceversa.
- Los clásicos (partidos entre sí de la Universidad de Chile, el Colo-Colo y la Universidad Católica) deben jugarse de la fecha 10 en adelante.

Además, se sabe que la fecha 4 y la fecha 12 serán las únicas que se disputarán en miércoles (y no en fin de semana) y que los equipos prefieren no jugar de local los días miércoles porque las recaudaciones bajan sensiblemente. Es por ello que Cassado y Reinetta han pensado en minimizar el número de equipos que juegan ambos miércoles en condición de local.

A pesar de sus conocimientos (profesionales y futbolísticos en el caso de Cassado, profesionales en el caso de Reinetta), los consultores no han podido resolver el problema y por ello le están solicitando ayuda a los alumnos del IN34A.

- 1) Diseñe un modelo de programación lineal entera que minimice el número de equipos que juegan ambos miércoles en condición de local, respetando las condiciones solicitadas por la ANFP.
- 2) ¿Cómo variaría el modelo si se le pide ahora que además de las condiciones mencionadas se incorpore una más que diga que obligatoriamente cada equipo debe jugar un miércoles de local y otro miércoles de visita? (o sea que cada equipo debe ser local en la fecha 4 y visita en la 12, o viceversa).

Pauta:

Parte 1:

$X_{ijk} = 1$ si i juega contra j de local en la fecha k ; 0 en caso contrario

$Y_i = 1$ si i juega sus dos partidos de local los miércoles; 0 en caso contrario

Función objetivo:

$$\text{Min } \sum_i Y_i$$

1) Cada equipo juega una vez por fecha

$$\sum_{j/j \neq i} X_{ijk} + X_{jik} = 1 \quad \forall i \quad \forall k$$

2) Cada partido se disputa una vez en el torneo

$$\sum_k (X_{ijk} + X_{jik}) = 1 \quad \forall i \neq j$$

3) Cada equipo tiene 9 o 10 localías por torneo

$$9 \leq \sum_{k,j (j \neq i)} X_{ijk} \leq 10 \quad \forall i$$

4) Un equipo no puede jugar 3 seguidos de local

$$\sum_{j/j \neq i} X_{ijk} + \sum_{j/j \neq i} X_{ij(k+1)} + \sum_{j/j \neq i} X_{ij(k+2)} \leq 2 \quad \forall i \quad \forall k$$

4') Lo mismo para visita

5) La U (1) y el Colo-Colo (2) no pueden ser simultáneamente locales

$$\sum_{j \neq 1} X_{1jk} + \sum_{j \neq 2} X_{2jk} = 1 \quad \forall k$$

5') Idem 5 para visita

6) Los clásicos de la fecha 10 en adelante

$X_{ijk} = 0$ para todo (i,j) formado por 2 de los 3 grandes y $k \leq 9$

7) Condición de variables Y_i

$$2 * Y_i \leq \sum_{j \neq i} X_{ij4} + \sum_{j \neq i} X_{ij12} \leq 1 + Y_i \quad \forall i$$

Parte 2:

Condición de miércoles: el que es local en la 4ª tiene que ser visitante en la 12ª

$$\sum_{j \neq i} X_{ij4} + \sum_{j \neq i} X_{ij12} = 1 \quad \forall i$$

Retiro las variables Y_i y la condición 7). Como busco ahora sólo una solución factible en la función objetivo puedo poner cualquier cosa.

Pregunta 3 (30%)

Una empresa de tele ventas posee 4 centros de llamado ya funcionando y 4 telefonistas nuevos que quiere asignar a dichos centros. Se hizo un estudio de mercado y se determinó el número estimado de clientes adicionales por mes al asignar los telefonistas a los centros. La siguiente tabla muestra el resultado de este estudio.

	1 telefonista	2 telefonistas	3 telefonistas	4 telefonistas
Centro 1	10	15	20	25
Centro 2	5	6	7	8
Centro 3	15	16	17	18
Centro 4	18	20	22	23

Por ejemplo asignar 2 telefonistas al centro 1 genera 15 clientes adicionales por mes.

- Trate de reducir la complejidad del problema aplicando un análisis previo. Justifique su decisión.

- Resuelve el problema simplificado aplicando programación dinámica. Si no logra simplificar el problema resuelve el problema original aplicando programación dinámica.
- Identifique estados, etapas, variables de decisión, la función de transformación y la función de recursión.
- ¿Cuál(es) es (son) la(s) política(s) óptima(s)?



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Richard Weber
Auxiliares: Blas Duarte
Sebastián Guzmán
Marianela Pereira

Pauta Pregunta 3 EXAMEN IN34A Semestre Primavera 2004

Pregunta 3

Una empresa de tele ventas posee 4 centros de llamado ya funcionando y 4 telefonistas nuevos que quiere asignar a dichos centros. Se hizo un estudio de mercado y se determinó el número estimado de clientes adicionales por mes al asignar los telefonistas a los centros. La siguiente tabla muestra el resultado de este estudio.

	1 telefonista	2 telefonistas	3 telefonistas	4 telefonistas
Centro 1	10	15	20	25
Centro 2	5	6	7	8
Centro 3	15	16	17	18
Centro 4	18	20	22	23

Por ejemplo asignar 2 telefonistas al centro 1 genera 15 clientes adicionales por mes.

- Trate de reducir la complejidad del problema aplicando un análisis previo. Justifique su decisión.
- Resuelve el problema simplificado aplicando programación dinámica. Si no logra simplificar el problema resuelve el problema original aplicando programación dinámica.
- Identifique estados, etapas, variables de decisión, la función de transformación y la función de recursión.
- ¿Cuál(es) es (son) la(s) política(s) óptima(s)?

Pauta:

Reducir la simplicidad del problema se puede hacer a simple vista, por ejemplo, se ve que si se asigna las cuatro telefonistas a un solo centro el máximo de beneficio será 25, lo que es menos que el beneficio obtenido al poner una telefonista en cada centro que es de 48, así, inmediatamente se elimina la opción de tener cuatro telefonistas en un solo centro.

Igualmente se ve que el máximo que se puede obtener con tres telefonistas es $22+15 < 48$ en el caso de ver tener 3 telefonistas en el centro 4 y una en el centro 3 o $20+18 < 38$ en el caso de poner 3 telefonistas en el centro 1 y 1 en el centro 4. Lo anterior se observa fácilmente mirando los máximos en cada columna.

Se hace notar que a simple vista pareciera cómo eliminar el centro 2, pero si se pone atención, se observa que con la eliminación de este centro elimina la posibilidad de tener una telefonista en cada centro, opción que da un beneficio alto observado a simple vista.

Se simplifica el problema eliminando las opciones con 3 y 4 telefonistas por centro.

Modelo en Programación Dinámica con el modelo simplificado:

Etapas:

$i = 1, 2, 3, 4$. Cada centro.

Variables de Estado:

S_i = Cantidad de telefonistas disponibles para el centro i

Variables decisión:

X_i = Cantidad de telefonistas asignadas al centro i .

Función Recursión:

$$S_{i+1} = S_i - X_i$$

Condición de Borde:

$$S_1 = 4$$

$$V^*_5(S_5) = 0$$

Función Beneficio:

Si se denomina $P_i(X_i)$ a el beneficio que da poner telefonistas en el centro i , valores que están dados en las tablas mostradas en el enunciado se tiene que:

$$V_i(S_i, X_i) = P_i(X_i) + V^*_{i+1}(S_i - X_i)$$

$$\text{Donde } V^*_{i+1}(S_i - X_i) = V^*_{i+1}(S_{i+1}) = \max_{0 \leq X_{i+1} \leq S_{i+1}} V_{i+1}(S_{i+1}, X_{i+1})$$

Así en general se tiene:

Centro 4:

S	X				
	0	1	2	X*	V*
1	0	18	-	1	18
2	0	18	20	2	20
3	0	18	20	2	20
4	0	18	20	2	20

Centro 3:

S	X				
	0	1	2	X*	V*
1	18	15	-	0	18
2	20	33	16	1	33
3	20	35	34	1	35
4	20	35	36	2	36

Centro 2:

	X				
S	0	1	2	X*	V*
1	18	5	-	0	18
2	33	23	6	0	33
3	35	38	24	1	38
4	36	40	39	1	40

Centro 1:

	X				
S	0	1	2	X*	V*
4	40	48	48	1, 2	48

Así existen dos políticas óptimas:

i	Xi	
	Política 1	Política 2
Centro 1	1	2
Centro 2	1	0
Centro 3	1	1
Centro 4	1	1
Beneficio	48	48

En el caso de no hacer la simplificación y resolver el problema como fue planteado inicialmente se tiene lo siguiente:

Centro 4:

	X					
S	0	1	2	3	4	X* V*
1	0	18	-	-	-	1 18
2	0	18	20	-	-	2 20
3	0	18	20	22	-	3 22
4	0	18	20	22	23	4 23

Centro 3:

	X					
S	0	1	2	3	4	X* V*
1	18	15	-	-		0 18
2	20	33	16	-		1 33
3	22	35	34	17		1 35
4	23	35	36	35	18	2 36

Centro 2:

	X						
S	0	1	2	3	4	X*	V*
1	18	5	-	-	-	0	18
2	33	23	6	-	-	0	33
3	35	38	24	7	-	1	38
4	36	40	39	25	8	1	40

Centro 1:

	X						
S	0	1	2	3	4	X*	V*
4	40	48	48	38	25	1, 2	48

Las políticas óptimas son las mismas.

Notas de corrección:

Reducción de complejidad 1 pto.

Modelo 2 ptos.: 0.5 etapas, 0.5 variables decisión, 0.5 variables estado, 0.5 recursión

Aplicación de PD 2ptos: 0.5 cada tabla, 0.75 en el caso de eliminar un centro, y si está la función beneficio y no la aplicación de PD otorgar 1 pto.

Dar políticas óptimas 1pto. :0.5 cada una.

Aparte:

-Quien eliminó el centro 2 tiene como nota máxima un 55, ya que tiene 1 punto menos por mala simplificación y 0.5 menos por no enunciar una de las políticas óptimas (que se podía ver a simple vista).