



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Optimización
Profesor: Guillermo Durán
Auxiliar: Giovanni Medina

Examen

Viernes 9 de Julio, 2004

Problema 1 (Doble Puntaje)

- (2 puntos) Explique qué significa que un problema de decisión esté en P, que un problema de decisión esté en NP y que un problema de decisión esté en NP-Completo.
- (2 puntos) Sea (P) el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) \\ \text{s.a.} & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad f, g_i \in C^1 \end{array}$$

- Puede existir x^* punto factible de (P) que verifique las condiciones de KKT y no sea mínimo local ni global? Justifique.
 - Puede existir x^* mínimo local de (P) que no cumpla las condiciones de KKT? Justifique.
- (2 puntos) Es cierto que un problema primal y su correspondiente dual no pueden ser ambos infactibles a la vez? Si es cierto, demuestre. Si no es cierto, exhiba un contraejemplo.

Problema 2 (Doble Puntaje)

La empresa de zapatos ALESSANDRO CASALDO desea planificar su producción e inventarios para los próximos T períodos de modo de cumplir con la demanda esperada de sus clientes. Para esto, ha agregado sus productos en K familias y dispone de un estudio que predice que la demanda esperada por productos de la familia k en el período t será d_{kt} . La empresa sabe que el cuello de botella en el proceso productivo es la cantidad de horas de artesanos, siendo A_t la cantidad fija de horas de artesanos disponibles en el período t . Se sabe además que cada unidad de los productos pertenecientes a la familia k consume a_k horas de artesano.

La empresa posee una bodega con capacidad para almacenar B unidades en cada período. El costo de almacenar cada unidad de productos pertenecientes a la familia k en el período t es b_{kt} . Sin embargo, también existe la posibilidad de almacenar en bodegas de terceros, sin límite, pero a un costo por unidad para los productos pertenecientes a la familia k en el período t igual a g_{kt} .

Suponga que g_{kt} es menor que b_{kt} , pero por política de la empresa la bodega de terceros sólo se puede ocupar cuando se ha copado la bodega propia.

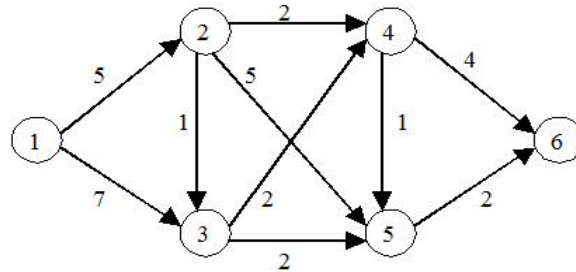
Plantee un modelo de programación lineal entera que satisfaciendo la demanda minimice los costos de la empresa.

Problema 3

- Se tiene un grafo orientado $G = [N, A]$, en este grafo existe un nodo k que es alcanzado por todos los nodos del grafo, salvo el nodo final, es decir existe un camino del nodo i al nodo k para todo i

distinto del nodo final. Se le solicita encontrar la ruta más corta de todos los nodos, salvo el nodo final, al nodo k . Explique como adaptaría la red dada para poder aplicar el Algoritmo Dijkstra con ese objetivo.

2. Aplique lo expresado anteriormente en (1) al siguiente ejemplo, donde se buscan las rutas más cortas al nodo 5 desde todos los nodos, salvo el nodo 6.



Problema 4

Escoja 1 de los siguientes 2 problemas

1. Encuentre la mejor solución **entera**, usando B&B, del problema dual de:
(**Indicación:** Encuentre la solución óptima de los problemas relajados en forma gráfica)

$$\text{máx } 6x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_4 \geq 0 \\ & x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

2. La cooperativa Desastre tiene silos en los cuales almacena su trigo. Para su administración en los próximos 3 años ha designado a Armijo Catalan, prestigioso consultor de "O.R.Ejaldo". La cooperativa cuenta con 3 silos, cada uno con capacidad de 2 toneladas, en los cuales tiene almacenadas 5 toneladas de trigo.

El trigo solo puede ser vendido por toneladas (no se permite la venta de fracciones de toneladas) a un precio de $P_1 = 5$ por ton, $P_2 = 7$ por ton, $P_3 = 15$ por ton el primer, segundo y tercer año respectivamente. Además cada silo que esté vacío a comienzo de año será arrendado por la cooperativa a un precio de $R_1 = 30$, $R_2 = 20$, $R_3 = 15$ el primer, segundo y tercer año respectivamente.

Considere que los silos no tienen costo de mantenimiento y que al comienzo del cuarto año la cooperativa tiene decidido vender los silos con todo el trigo que quede en su interior a un precio de $V = 40$ por los silos más 5 por cada tonelada de trigo en su interior.

Dado lo complejo del problema, Armijo le ha solicitado a usted que resuelva el problema utilizando programación dinámica, entregando las toneladas que se deben vender cada año y el beneficio total que se obtendrá.

(**Nota:** No es necesario modelar el problema, solo debe resolverlo)

Pauta

Problema 1

1. .
 - Estar en P: Existe un algoritmo polinomial que lo resuelve (0,5 puntos)
 - Estar en NP: Existe un algoritmo no determinístico polinomial que lo resuelve o que existe un certificado verificable en tiempo polinomial (0,5 puntos)
 - Estar en NP-Completo: Está en NP y además todo problema en NP se puede transformar polinomialmente en él (1 punto)
2. .
 - a) Si, si la función f o las funciones g_i no son convexas (1 punto)
 - b) Si, si el punto x^* no es regular (1 punto)
3. No es cierto, hay que exhibir un contraejemplo donde ambos sean infactibles. (2 puntos)

Problema 2

1. Variables de Decisión:
 - x_{kt} : cantidad de producción de k en t
 - y_{kt} : cantidad de inventario de k en t en bodega propia (inventario al termino de t)
 - z_{kt} : cantidad de inventario de k en t en bodega de terceros (inventario al termino de t)
 - Y_t : cantidad de inventario total a guardar en bodegas propias en t
 - Z_t : cantidad de inventario total a guardar en bodegas arrendadas en t
 - ∂_t : 1 si se usan bodegas de terceros, 0 si no
2. Restricciones:
 - a) Capacidad de producción.
$$\sum_k a_k x_{kt} \leq A_t \quad \forall t$$
 - b) Flujo de producción
$$y_{k,t-1} + z_{k,t-1} + x_{k,t} = d_{k,t} + y_{k,t} + z_{k,t} \quad \forall k, t$$
 - c) Capacidad de Bodega
$$\sum_k y_{kt} \leq B \quad \forall t$$
 - d) Usar bodegas de terceros solo cuando las bodegas propias están llenas.
$$(B - Y_t + \varepsilon) \leq (1 - \partial_t)M \quad \forall t \quad \text{con } M \gg 0 \text{ y } \varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0$$
$$Z_t \leq \partial_t M \quad \forall t \quad \text{con } M \gg 0$$
 - e) Todo lo que se guarda en una bodega debe ser igual la sma de lo que se guarda de cada producto.
$$Y_t = \sum_k y_{kt} \quad \forall t$$
$$Z_t = \sum_k z_{kt} \quad \forall t$$

f) Naturaleza de las variables.

$$x_{kt}, y_{kt}, z_{kt} \in \mathbb{N}$$

$$\partial_t \in \{0, 1\}$$

3. Función Objetivo:

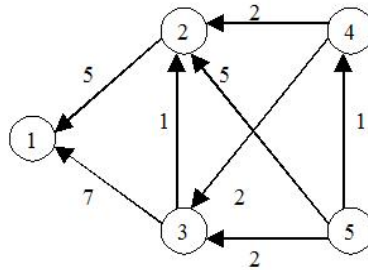
Minimizar los costos

$$\min \sum_{kt} y_{kt} b_{kt} + z_{kt} g_{kt}$$

Nota de Corrección: Las variables Y_t y Z_t pueden no ir y ser reemplazadas por su equivalencia mostrada en la restricción (e). El valor de M puede reemplazarse por una cota máxima como las capacidades máximas de las bodegas.

Problema 3

- Primero hay que eliminar el nodo final y todos los arcos que llegan a él en el grafo $G = [N, A]$, luego hay que invertir el orden de todos los arcos y aplicar dijkstra en la forma clásica usando como nodo inicial el nodo k . Así la solución que entrega dijkstra es la justamente la pedida, solo hay que invertir el árbol solución.
- Aplicando lo expuesto anteriormente sobre el grafo dado, el grafo modificado quedaría como sigue:

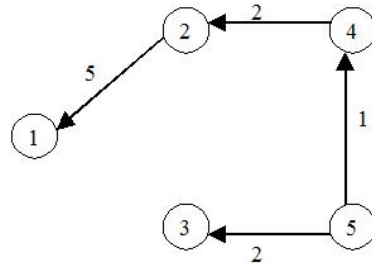


Ahora apliquemos dijkstra sobre este grafo:

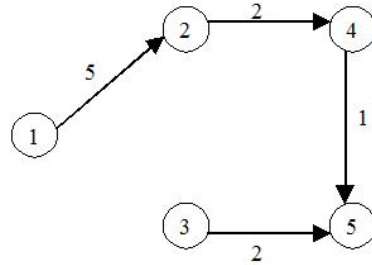
- Inicialización:
 $S = \phi, \pi(5) = 0, \pi(i) = +\infty \forall i \neq 5$
- Iteración 1:
 $j = 5 \Rightarrow S = \{5\}$
 $\pi(2) = 0 + 5 = 5, P(2) = 5$
 $\pi(3) = 0 + 2 = 2, P(3) = 5$
 $\pi(4) = 0 + 1 = 1, P(4) = 5$
- Iteración 2:
 $j = 4 \Rightarrow S = \{5, 4\}$
 $\pi(2) = 1 + 2 = 3, P(2) = 4$
- Iteración 3:
 $j = 3 \Rightarrow S = \{5, 4, 3\}$
 $\pi(1) = 2 + 7 = 9, P(1) = 3$

- Iteración 4:
 $j = 2 \Rightarrow S = \{5, 4, 3, 2\}$
 $\pi(1) = 3 + 5 = 8, P(1) = 2$
- Iteración 5:
 $j = 1 \Rightarrow S = \{5, 4, 3, 2, 1\}$

Luego el árbol solución es:



Luego, al invertir los arcos de este árbol obtenemos la solución final:



Problema 4

1. El dual del problema sería:

$$\begin{aligned}
 &\text{mín } y_1 + y_2 \\
 \text{s.a. } &3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\
 &y_1 + 2y_2 \geq 3 \\
 &y_1 - y_2 \leq 2 \\
 &3y_1 - y_2 \geq 0 \\
 &y_1, y_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

El problema con variables enteras sería:

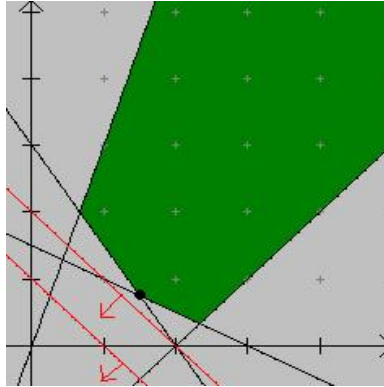
$$\begin{aligned}
 &\text{mín } y_1 + y_2 \\
 \text{s.a. } &3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\
 &y_1 + 2y_2 \geq 3 \\
 &y_1 - y_2 \leq 2 \\
 &3y_1 - y_2 \geq 0 \\
 &y_1, y_2 \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Cuya relajación es precisamente el problema original, luego apliquemos Branch & Bound sobre este problema:

▪ **P₀:**

$$\begin{aligned} & \text{mín } y_1 + y_2 \\ \text{s.a. } & 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 - y_2 \leq 2 \\ & 3y_1 - y_2 \geq 0 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Encontremos la solución gráficamente:



Vemos que la solución se encuentra donde las 2 primeras restricciones son activas, o sea donde se cumple que:

$$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 &= 6 \\ y_1 + 2y_2 &= 3 \end{aligned}$$

Luego tenemos que el punto $y_1^0 = \frac{3}{2} = 1,5$ e $y_2^0 = \frac{3}{4} = 0,75$ es el óptimo con $z_0 = 2,25$.

Ahora se debe ramificar por cualquiera de las 2 variables, en esta pauta haremos las 2 ramificaciones, pero solo es necesaria una.

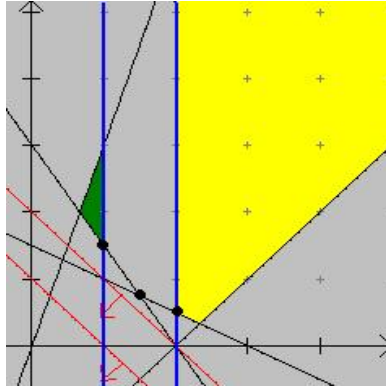
▪ **Opción 1:** Ramificar por y_1

• **P₁ y P₂:**

$$\begin{aligned} & (P_1) \text{ mín } y_1 + y_2 \\ \text{s.a. } & 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 - y_2 \leq 2 \\ & 3y_1 - y_2 \geq 0 \\ & y_1 \geq 2 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (P_2) \text{ mín } y_1 + y_2 \\ \text{s.a. } & 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 - y_2 \leq 2 \\ & 3y_1 - y_2 \geq 0 \\ & y_1 \leq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Gráficamente tenemos:



Podemos observar que en el óptimo de P_1 , $y_1^1 = 2$ y la segunda restricción es activa, por lo que $y_2^1 = \frac{1}{2} = 0,5$ y $z_1 = 2,5$, por otra parte, en el óptimo de P_2 , $y_1^2 = 1$ y la primera restricción es activa, por lo que $y_2^2 = \frac{3}{2} = 1,5$ y $z_2 = 2,5$.

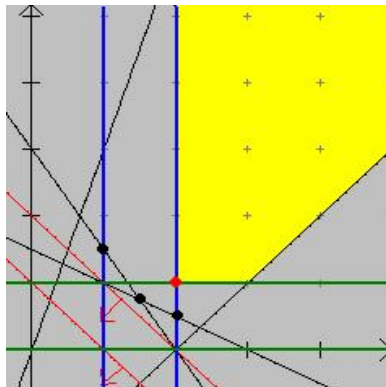
Luego, se deben ramificar ambos problemas. Ramifiquemos primero el problema P_1 .

• P_3 y P_4 :

$$\begin{aligned} (P_3) \quad & \text{mín } y_1 + y_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 - y_2 \leq 2 \\ & 3y_1 - y_2 \geq 0 \\ & y_1 \geq 2 \\ & y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P_4) \quad & \text{mín } y_1 + y_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 - y_2 \leq 2 \\ & 3y_1 - y_2 \geq 0 \\ & y_1 \geq 2 \\ & y_2 \leq 0 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Graficando tenemos:



Claramente vemos que P_4 es infactible, mientras que P_3 tiene como óptimos a $y_1^3 = 1$, $y_2^3 = 2$ y $z_3 = 3$, por lo que no se ramifica más ninguno de los 2 problemas y el valor de la incumbente es $\hat{z} = 3$.

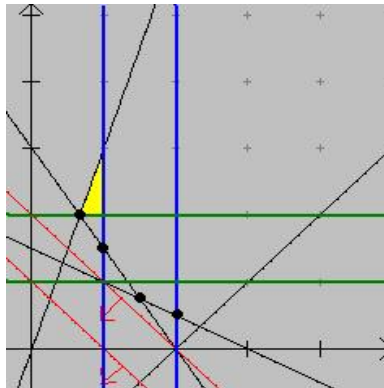
Ramifiquemos ahora P_2 .

- P_5 y P_6 :

$$\begin{aligned} (P_5) \quad & \text{mín } y_1 + y_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 - y_2 \leq 2 \\ & 3y_1 - y_2 \geq 0 \\ & y_1 \leq 1 \\ & y_2 \geq 2 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P_6) \quad & \text{mín } y_1 + y_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 - y_2 \leq 2 \\ & 3y_1 - y_2 \geq 0 \\ & y_1 \leq 1 \\ & y_2 \leq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Graficando tenemos:



Claramente P_6 es infactible, por lo que se deja de ramificar por ese problema. Por otra parte, en el óptimo de P_5 , $y_2^5 = 2$ y la cuarta restricción es activa, por lo que $y_1^5 = \frac{2}{3} = 0,67$ y $z_5 = 2,67$

Ramifiquemos por P_5

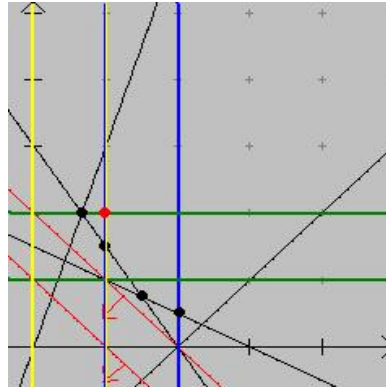
- P_7 y P_8 :

$$\begin{aligned} (P_7) \quad & \text{mín } y_1 + y_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 - y_2 \leq 2 \\ & 3y_1 - y_2 \geq 0 \\ & y_1 \leq 1 \\ & y_2 \geq 2 \\ & y_1 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$(P_8) \quad \text{mín } y_1 + y_2$$

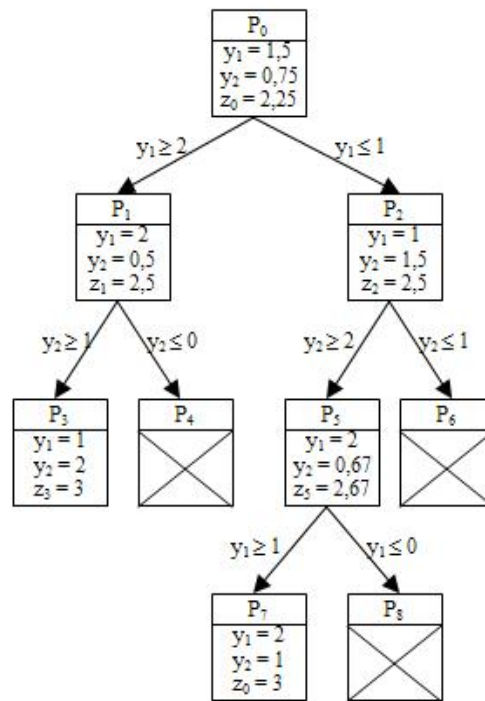
$$\begin{aligned}
 \text{s.a. } & 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\
 & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\
 & y_1 - y_2 \leq 2 \\
 & 3y_1 - y_2 \geq 0 \\
 & y_1 \leq 1 \\
 & y_2 \geq 2 \\
 & y_1 \leq 0 \\
 & y_1, y_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Graficando tenemos:



Vemos que P_8 es infactible, por lo que no se ramifica más por ese problema. Por otra parte, en P_7 vemos que $y_1^7 = 2$, $y_2^7 = 1$ y $z_7 = 3$, como encontramos una solución entera, no se ramifica más por este problema.

Finalmente podemos ver el arbol de solución siguiente:



Así las soluciones óptimas son las de P_3 ($y_1^* = 1$, $y_2^* = 2$ y $z = 3$) y P_7 ($y_1^* = 2$, $y_2^* = 1$ y $z = 3$).

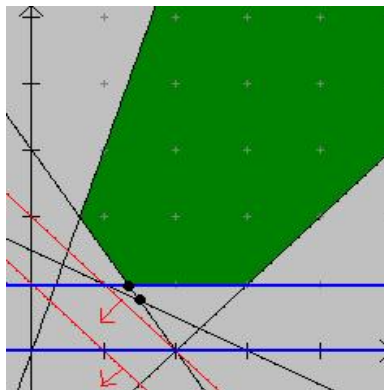
■ **Opción 2:** Ramificar por y_2

• **P_1 y P_2 :**

$$\begin{aligned} (P_1) \text{ mín } y_1 + y_2 \\ \text{s.a. } 3y_1 + 2y_2 &\geq 6 \\ y_1 + 2y_2 &\geq 3 \\ y_1 - y_2 &\leq 2 \\ 3y_1 - y_2 &\geq 0 \\ y_2 &\geq 1 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P_2) \text{ mín } y_1 + y_2 \\ \text{s.a. } 3y_1 + 2y_2 &\geq 6 \\ y_1 + 2y_2 &\geq 3 \\ y_1 - y_2 &\leq 2 \\ 3y_1 - y_2 &\geq 0 \\ y_2 &\leq 0 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Grafiquemos el problema:



Se puede ver que P_2 es infactible, por lo que no se ramifica por ese problema. Además se ve que en el óptimo de P_1 , $y_2 = 1$ y la primera restricción es activa, por lo que $y_1 = \frac{4}{3} = 1,33$ y $z_1 = 2,33$.

Ramifiquemos el problema P_1 .

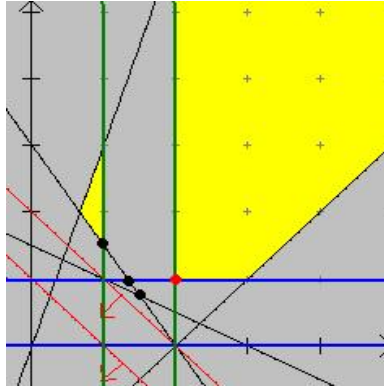
• **P_3 y P_4 :**

$$\begin{aligned} (P_3) \text{ mín } y_1 + y_2 \\ \text{s.a. } 3y_1 + 2y_2 &\geq 6 \\ y_1 + 2y_2 &\geq 3 \\ y_1 - y_2 &\leq 2 \\ 3y_1 - y_2 &\geq 0 \\ y_2 &\geq 1 \\ y_1 &\geq 2 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(P_4) \text{ mín } y_1 + y_2$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a. } & 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\
& y_1 + 2y_2 \geq 3 \\
& y_1 - y_2 \leq 2 \\
& 3y_1 - y_2 \geq 0 \\
& y_2 \geq 1 \\
& y_1 \leq 1 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Graficando tenemos:



Claramente se observa que en P_3 el óptimo viene dado por $y_1 = 2$ e $y_2 = 1$ con $z_3 = 3$. Este problema no se sigue ramificando ya que se ha encontrado una solución entera y el valor de la incumbente pasa a ser $\hat{z} = 3$.

En P_4 vemos que en el óptimo $y_1 = 1$ y la primera restricción es activa, luego $y_2 = \frac{3}{2} = 1,5$ y $z_4 = 2,5$.

Ramifiquemos este último problema.

• P_5 y P_6 :

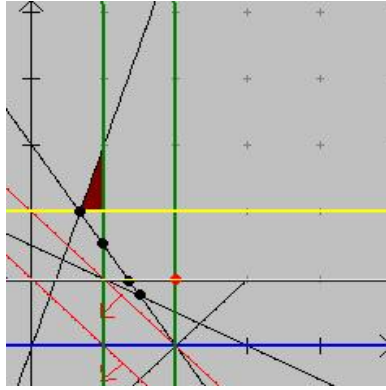
$$(P_5) \text{ mín } y_1 + y_2$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a. } & 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\
& y_1 + 2y_2 \geq 3 \\
& y_1 - y_2 \leq 2 \\
& 3y_1 - y_2 \geq 0 \\
& y_2 \geq 1 \\
& y_1 \leq 1 \\
& y_2 \geq 2 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$(P_6) \text{ mín } y_1 + y_2$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a. } & 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\
& y_1 + 2y_2 \geq 3 \\
& y_1 - y_2 \leq 2 \\
& 3y_1 - y_2 \geq 0 \\
& y_2 \geq 1 \\
& y_1 \leq 1 \\
& y_2 \leq 1 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Grafiquemoslos:



Claramente P_6 se hace infactible. En el óptimo de P_5 , $y_2 = 2$ y la cuarta restricción es activa, por lo que $y_1 = \frac{2}{3} = 0,67$ y $z_5 = 2,67$.

Ramifiquemos P_5

- P_7 y P_8

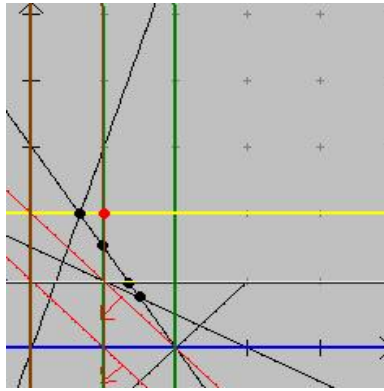
(P_7) mín $y_1 + y_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 - y_2 \leq 2 \\ & 3y_1 - y_2 \geq 0 \\ & y_2 \geq 1 \\ & y_1 \leq 1 \\ & y_2 \geq 2 \\ & y_1 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(P_8) mín $y_1 + y_2$

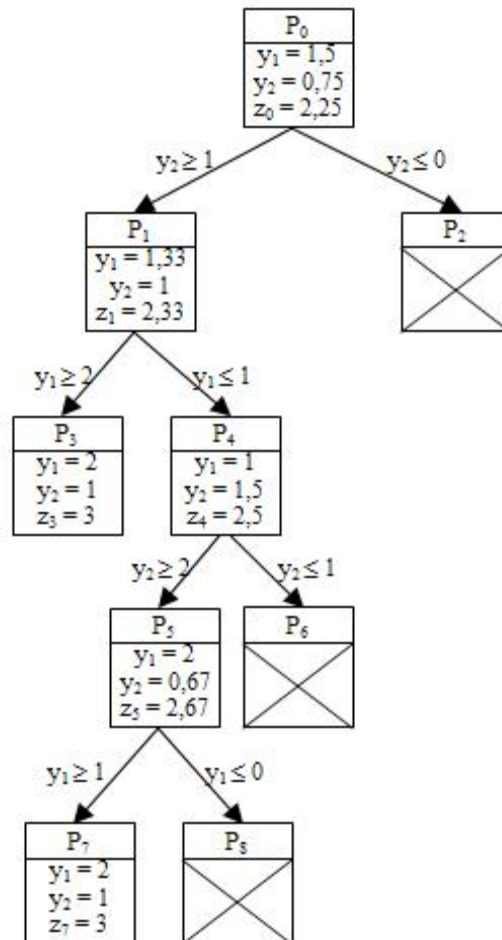
$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 - y_2 \leq 2 \\ & 3y_1 - y_2 \geq 0 \\ & y_2 \geq 1 \\ & y_1 \leq 1 \\ & y_2 \geq 2 \\ & y_1 \leq 0 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Graficando tenemos:



Podemos ver que P_8 es infactible y que P_7 tiene solución óptima en $y_1 = 1$ e $y_2 = 2$ (entera) con $z_7 = 3$

Luego el árbol de solución queda:



Así las soluciones óptimas son las de P_3 ($y_1 = 2$, $y_2 = 1$ y $z = 3$) y P_7 ($y_1 = 1$, $y_2 = 2$ y $z = 3$).

- No es necesario hacer el modelo del problema, sin embargo se especificará explícitamente por si alguien lo hace:

- Etapas: años $t = 1, 2, 3$
- Variable de Decisión: x_t = número de toneladas vendidas en t .
- Variable de Estado: y_t = número de toneladas que quedan en los silos al comienzo del año t .
- Ecuaciones de Recurrencia:
 - Función de Transformación: $y_{t+1} = y_t - x_t$
 - Función de Recursión: $\max_{x_t \in \mathbb{N}, 0 \leq x_t \leq y_t} \{P_t x_t + R_t(3 - \lceil \frac{y_t}{2} \rceil) + f_{t+1}(y_{t+1})\}$
- Condiciones de Borde:
 - Inicial: $y_1 = 5$
 - Final: $f_4(y_4) = V + 5y_4$

Resolvamos el problema por tablas:

▪ **Etapla 3:**

y_3	$x_3 = 0$	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$x_3 = 5$	$f_3(y_3)$	x_3^*
0	85	i	i	i	i	i	85	0
1	75	85	i	i	i	i	85	1
2	80	90	100	i	i	i	100	2
3	70	80	90	100	i	i	100	3
4	75	85	95	105	115	i	115	4
5	65	75	85	95	105	115	115	5

▪ **Etapla 2:**

y_2	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$x_2 = 5$	$f_2(y_2)$	x_2^*
0	145	i	i	i	i	i	145	0
1	125	132	i	i	i	i	132	1
2	140	132	139	i	i	i	139	2
3	120	127	119	126	i	i	127	1
4	135	127	134	126	133	i	134	2
5	115	122	114	121	113	120	122	1

▪ **Etapla 1:**

y_1	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$x_1 = 5$	$f_1(y_1)$	x_1^*
5	122	139	137	154	152	170	170	5

Así la estrategia óptima es vender todo (5 toneladas) el primer año, con lo cual se obtiene un beneficio de $f_1(y_1) = 170$.

Dudas y/o Consultas:
Giovanni Medina Reyes
 gmedina@ing.uchile.cl