



Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Civil Industrial.
IN34A "Optimización"
Semestre Primavera 2006

Profesores: Guillermo Durán
Richard Weber
Auxiliares: Marianela Pereira
Ximena Schultz
Rodrigo Wolf

Examen 14 de julio de 2006

Problema 1 (40%)

- 1) (1 pto.) Suponga que tiene un problema de optimización con función objetivo lineal y restricciones no lineales.
- a) (0,25 ptos.) ¿Conoce algún algoritmo polinomial para resolverlo? ¿Por qué?
 - b) (0,5 ptos.) ¿Qué técnicas usaría para su resolución? Describa brevemente los métodos vistos en clase para este tipo de problemas.
 - c) (0,25 ptos.) ¿Qué información adicional le aporta el hecho de que la función objetivo sea lineal?

- 2) (1 pto.)
- a) (0,5 ptos.) ¿Es el algoritmo SIMPLEX para programación lineal un algoritmo polinomial? Justifique.
 - b) (0,5 ptos.) ¿Es el problema de programación lineal un problema polinomial? Justifique.

- 3) (2 pto.) Un auxiliar de nuestra facultad ha notado que su llegada a las alumnas está siendo cada vez peor. Él, astutamente ha notado que su estado físico no es de lo mejor, por lo que ha decidido hacer una dieta óptima y estricta.

Considere que este auxiliar sólo considera que su dieta debe estar compuesta por Papas Fritas y Coca-Loca Ligth. Él asegura que el nivel de utilidad que le reporta cada unidad de estos alimentos es de 8 y 10 U.M. respectivamente.

Sin embargo él se puso a pensar que, dadas las características de sus alimentos, no deberá exceder una cantidad de 24 unidades calóricas (u.c.) ni deberá pasarse de un índice de 24 unidades de azúcar (u.a.)

Parea ello él analiza los componentes de sus alimentos y se percató de que cada uno de ellos tiene la siguiente distribución:

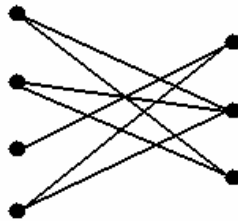
	Calorías (u.c.)	Azúcar (u.a.)
Papas Fritas	4	8
Cola-Loca Ligth	6	3

- a) (0,5 ptos.) Formule el problema como un problema de programación lineal entera y encuentre el óptimo entero de forma gráfica.
- b) (1,5 ptos.) Use el enfoque de solución B&B para resolver el problema, explicando en cada nodo del árbol si ramificar o no y por qué. Los subproblemas pueden ser resueltos de manera gráfica.

Nota 1: El óptimo de la relajación lineal del problema se da en 2 unidades de papas fritas y 2,67 unidades de Coca-Loca Ligth.

Nota 2: Utilizar la información obtenida en el punto 1) para ramificar la menor cantidad de nodos posibles.

- 4) (2 pts.) Un grafo es bipartito si existe una partición de sus nodos en V_1 y V_2 de modo que no existan aristas entre nodos de V_1 ni entre nodos de V_2 . Una correspondencia en un grafo es un conjunto de aristas que no comparten vértices.
- a) (0,5 pts.) Explicar como transformaría un grafo bipartito cualquiera en una red de modo que el algoritmo de flujo máximo le permita encontrar la correspondencia máxima.
- b) (1,5 pts.) Aplicar las ideas expresadas en el punto a) para encontrar la correspondencia máxima del siguiente grafo bipartito. (Nota: Debe transformar el grafo en una red y aplicar detalladamente el algoritmo de Ford & Fulkerson).



Problema 2 (40%)

El detective Peschuwo tiene que resolver su primer caso. Han asesinado a Missu y tiene que descubrir quien fue el asesino, en donde lo hizo y con que arma lo hizo. Los seis posibles asesinos son: El coronel Mostaza, la señora Pavo Real, la señorita Escarlata, la señora Blanco, el Profesor Ciruela y el señor Verde. Las seis posibles armas son: Un cuchillo, un candelabro, una pistola, una cuerda, una cañería y una llave inglesa. Los posibles lugares son las piezas de la casa de Missu: el hall, el salón de descanso, el comedor, la cocina, el salón de baile, el conservatorio, el salón de billar, la librería y el estudio.

Para limpiar las huellas y rastros de haber utilizado el arma j , se debe incurrir en un gasto A_j , y para cada pieza k , se incurre en un gasto P_k por el mismo concepto.

Adicionalmente se sabe que uno de los cuatro sirvientes de la casa que no son sospechosos fue sobornado por el asesino para que lo ayudara con la limpieza. El costo del soborno dependiendo del sirviente l sobornado y del sospechoso i que lo sobornó es de S_{il} .

Se sabe que cada sospechoso i cuenta con una fortuna de F_i , y que por razones económicas y posibles sospechas no pudo haber gastado más del 20% de su fortuna en el asesinato. Adicionalmente se sabe que el asesino gastó lo máximo que pudo de forma de hacer todo lo posible para que no se sospechara de él. De esta forma es posible encontrar al asesino, el arma y la pieza analizando quien gastó la menor diferencia entre lo que tenía para gastar y lo que se gastó.

Más allá de que asesino, arma y pieza pueden encontrarse como se mencionó en el párrafo anterior, Peschuwo necesita una prueba contundente para mostrarle al juez sobre en que pieza se cometió el crimen. Para ello, se sabe que el tiempo que pasó desde el asesinato no supera los 50 minutos y el solvente utilizado para limpiar las huellas demora 90 minutos en disolverse por lo que Peschuwo tiene 40 minutos para recorrer las piezas, detectar el solvente y reconocer así la pieza en la que se asesinó a la víctima. Para ello sabe que hay una sola combinación de orden de piezas que cumple el requisito de los 40 minutos, por concepto de donde están posicionadas las puertas con respecto a las otras, y por los pasajes secretos que hay ente ellas. El tiempo utilizando los datos anteriores de visitar la pieza f después de la g es de t_{fg} minutos, y el tiempo que demora en registrar la pieza k es t_k . Considere que inicialmente el se encuentra en el hall (pieza N°1) y que debe volver a este una vez terminado el recorrido.

Cree un modelo de programación lineal entero que le permita a Peschuwo descubrir quien fue el asesino, con que arma y en que pieza lo hizo y en que orden debe recorrer las piezas.

Problema 3 (20%)

Una vez que ha determinado el orden en que recorrerá las piezas, Peschuwo se da cuenta de que tiene otro problema por delante. Tiene un presupuesto de $P = \$300.000$ y sabe que para poder reconocer el solvente debe gastar G_{kf} , dependiente de la pieza k (producto del tamaño y de las cosas que tiene la pieza) y de la técnica f utilizada.

A Peschuwo le reporta una satisfacción personal de SP_{kf} por utilizar el solvente f en la pieza k .

- a) (3 ptos.) Plantee el problema de programación dinámica que le ayudará a Peschuwo a resolver su problema maximizando su bienestar personal.

Se sabe que existen 3 tipos de técnicas diferentes asociadas a costos distintos. La tabla de costos que se muestra a continuación está en miles de pesos.

	G_{kf}	1	2	3
hall	1	20	40	60
salon de descanso	2	20	40	40
comedor	3	20	40	60
cocina	4	20	20	40
salón de baile	5	40	40	40
conservatorio	6	40	20	20
salón de billar	7	20	20	40
librería	8	20	60	40
estudio	9	20	20	40

La tabla de satisfacción personal se muestra a continuación.

	SP_{kf}	1	2	3
hall	1	40	30	60
salon de descanso	2	50	40	60
comedor	3	20	60	70
cocina	4	60	50	40
salón de baile	5	40	40	40
conservatorio	6	40	60	50
salón de billar	7	20	50	40
librería	8	50	60	40
estudio	9	20	20	50

- b) (3 ptos.) Con dichos datos ayude a Peschuwo indicándole como se debería resolver el problema, resolviéndolo como si existieran solo 3 habitaciones (1, 2 y 3), utilizando el modelo realizado en la parte a). Suponga que para estas tres habitaciones tiene un presupuesto de \$100.000.

Examen
14 de julio de 2006

Problema 1 (40%)

- 1) (1 pto.) Suponga que tiene un problema de optimización con función objetivo lineal y restricciones no lineales.

- a) (0,25 ptos.) ¿Conoce algún algoritmo polinomial para resolverlo? ¿Por qué?

No, no se conocen algoritmos polinomiales que resuelvan problemas no lineales.

- b) (0,5 ptos.) ¿Qué técnicas usaría para su resolución? Describa brevemente los métodos vistos en clase para este tipo de problemas.

Se puede utilizar el Método del Gradiente o el método de Newton. (0,25 por cada método y su descripción)

Método del Gradiente:

Paso 0:

Se escribe el problema en la forma estándar (como un problema de minimización).
Se elige un punto para comenzar a iterar.

Paso 1:

Primero se calcula el Gradiente: $\nabla f(X_1, X_2)$

Luego se evalúa el gradiente en el punto de partida. Si corresponde al (0,0), se para de iterar, ya que se está en un punto crítico. Si la función es convexa, se ha encontrado el óptimo.

Sino se calcula el siguiente punto mediante la siguiente fórmula:
$$X^{k+1} = X^k - \lambda_k \cdot \nabla f(X^k), \text{ con } \lambda_k \exists \min_{\lambda_k} f(X^k - \lambda_k \cdot \nabla f(X^k)).$$

Paso 2:

Se evalúa el gradiente en X^{k+1} , si se obtiene (0,0), se para de iterar, sino, se vuelve al paso 1.

Método de Newton:

Paso 0:

Se escribe el problema en la forma estándar (como un problema de minimización).
Se elige un punto para comenzar a iterar.

Paso 1:

Primero se calcula el Gradiente: $\nabla f(X_1, X_2)$

Adicionalmente se calcula el Hessiano: $Hf(X_1, X_2)$

Luego se evalúa el gradiente en el punto de partida. Si corresponde al (0,0), se para de iterar, ya que se está en un punto crítico. Si la función es convexa, se ha encontrado el óptimo.

Sino se calcula el siguiente punto mediante la siguiente fórmula:
$$X^{k+1} = X^k - Hf^{-1} \cdot \nabla f(X^k).$$

Paso 2:

Se evalúa el gradiente en X^{k+1} , si se obtiene (0,0), se para de iterar, sino, se vuelve al paso 1.

- c) (0,25 ptos.) ¿Qué información adicional le aporta el hecho de que la función objetivo sea lineal?

Nos dice que la función objetivo es convexa.

2) (1 pto.)

- a) (0,5 ptos.) ¿Es el algoritmo SIMPLEX para programación lineal un algoritmo polinomial? Justifique.

No, ya que es un algoritmo que recorre los extremos del poliedro factible, y estos pueden ser exponenciales en el tiempo del problema.

- b) (0,5 ptos.) ¿Es el problema de programación lineal un problema polinomial? Justifique.

Esto es lo mismo que preguntar si es que existe un algoritmo que siempre resuelva un problema lineal en un tiempo polinomial en el tamaño del problema. La respuesta es sí, por ejemplo el Khachiyan. (El ejemplo no es necesario, la justificación está en la primera frase)

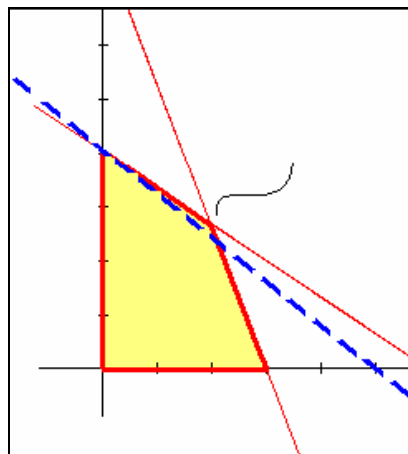
3) (2 pto.)

- a) (0,5 ptos.) Formule el problema como un problema de programación lineal entera y encuentre el óptimo entero de forma gráfica.

Formulación del problema:

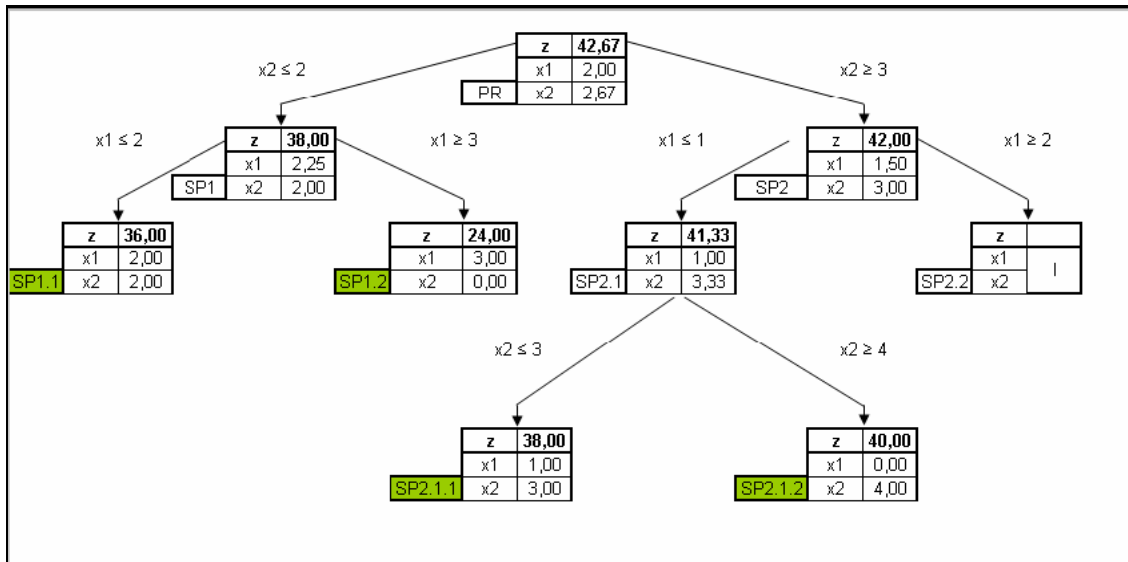
$$\begin{aligned} \text{Max } & 8X_1 + 10X_2 \\ \text{s.a. } & 4X_1 + 6X_2 \leq 24 \\ & 8X_1 + 3X_2 \leq 24 \\ & X_1, X_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Gráficamente:



Se observa que la solución del problema entero se encuentra en el $X_1 = 0, X_2 = 4$. Y el óptimo es de 40. (Esto puede hacerse probando las posibles soluciones enteras, que son pocas)

- b) (1,5 ptos.) Use el enfoque de solución B&B para resolver el problema, explicando en cada nodo del árbol si ramificar o no y por qué. Los subproblemas pueden ser resueltos de manera gráfica.



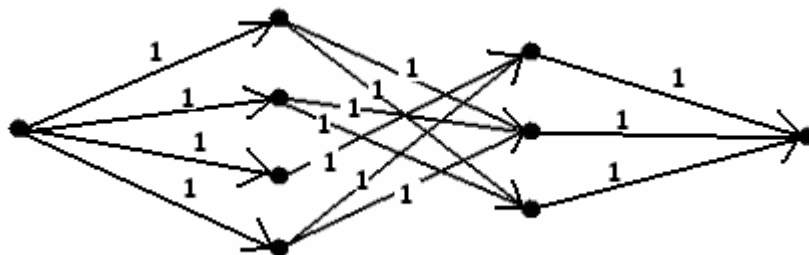
(Se debe indicar por que se detiene la ramificación en cada rama. Las notas son solo para simplificar el problema, no se descuenta puntaje sino son consideradas.)

4) (2 ptos.)

- c) (0,5 ptos.) Explicar como transformaría un grafo bipartito cualquiera en una red de modo que el algoritmo de flujo máximo le permita encontrar la correspondencia máxima.

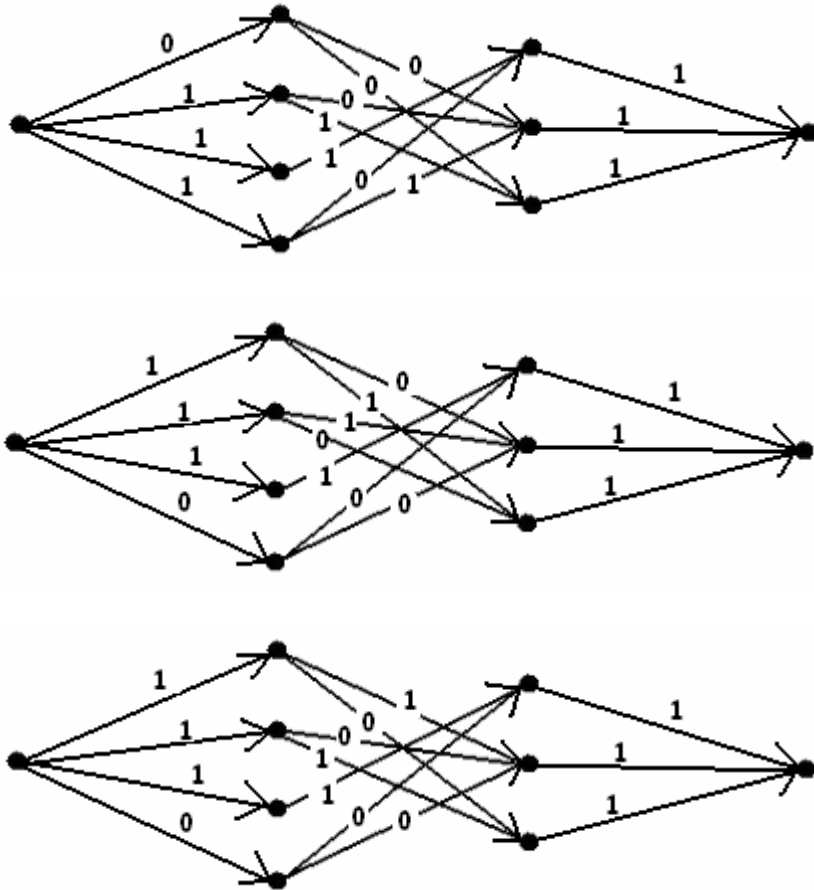
Lo que se debe realizar es agregar un nodo de inicio y uno de término y agregar arcos desde el nodo inicial a todos los nodos pertenecientes a V_1 , y de todos los nodos pertenecientes a V_2 hacia el nodo final. Luego se debe orientar todos los arcos del gráfico, en la dirección que va desde el nodo inicial con el final. Se le asigna capacidad máxima 1 a todos los arcos, y luego se resuelve mediante el algoritmo de flujo máximo.

- d) (1,5 ptos.) Aplicar las ideas expresadas en el punto a) para encontrar la correspondencia máxima del siguiente grafo bipartito. (Nota: Debe transformar el grafo en una red y aplicar detalladamente el algoritmo de Ford & Fulkerson).



(Por esto 0,5)

Las posibles soluciones son:



(1 por aplicar correctamente el algoritmo)

Problema 2 (40%)

Variables: (1,2 ptos.; 0,6 la primera, 0,3 las dos siguientes)

$$X_{ijk} \begin{cases} 1 & \text{Si sospechoso } i \text{ mató a Missu con el arma } j \text{ en la pieza } k. \\ 0 & \text{Si no.} \end{cases}$$

$$Y_{il} \begin{cases} 1 & \text{Si sospechoso } i \text{ sobornó a sirviente } l. \\ 0 & \text{Si no.} \end{cases}$$

$$Z_{fg} \begin{cases} 1 & \text{Si visita pieza } g \text{ después de la pieza } f. \\ 0 & \text{Si no.} \end{cases}$$

Restricciones: (3,3 ptos.)

a) *Gasto máximo posible:* (0,5 ptos.)

$$\sum_j \left(A_j \cdot \sum_k X_{ijk} \right) + \sum_k P_k \cdot \left(\sum_j X_{ijk} \right) + \sum_l (S_{il} \cdot Y_{il}) \leq 0,2 \cdot F_i \quad \forall i$$

b) *Solo existe un asesino, con un arma, en un lugar:* (0,4 ptos.)

$$\sum_{i,j,k} X_{ijk} = 1$$

c) El asesino solo sobornó a un sirviente: (0,4 ptos.)

$$\sum_{il} Y_{il} = 1$$

d) Relación entre variables: (0,3 ptos.)

$$\sum_l Y_{il} \leq \sum_{j,k} X_{ijk} \quad \forall i$$

$$\text{ó}$$

$$Y_{il} \leq X_{ijk} \quad \forall i, j, k$$

e) Va a solo una pieza desde cualquier pieza: (0,3 ptos.)

$$\sum_{g, g \neq f} Z_{fg} = 1 \quad \forall f$$

f) Llega a una pieza desde exactamente una pieza: (0,3 ptos.)

$$\sum_{f, f \neq g} Z_{fg} = 1 \quad \forall g$$

g) Evitar los subciclos: (0,4 ptos.)

$$\sum_{f, g \in SC} Z_{fg} = |SC| - 1 \quad 2 \leq |SC| \leq n - 2$$

h) Se demora menos de 40 minutos: (0,4 ptos.)

$$\sum_{f, g} Z_{fg} \cdot t_{fg} + \sum_k t_k \leq 40$$

i) Naturaleza de las variables: (0,3 ptos.)

$$X_{ijk} \in \{0,1\}; Y_{il} \in \{0,1\}; G_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \forall i, j, k$$

Función Objetivo: (1,5 ptos.)

$$\min \sum_{i,j,k} 0,2 \cdot F_i \cdot X_{ijki} - \left(\sum_j \left(A_j \cdot \sum_k X_{ijk} \right) + \sum_k P_k \cdot \left(\sum_j X_{ijk} \right) + \sum_{i,l} S_{il} \cdot Y_{il} \right)$$

Problema 3 (20%)

a) (3 ptos.) Problema de programación dinámica:

Etapas: Piezas k: 1,..,9 (0,4 ptos.)

Variable de decisión: X_k $\begin{cases} 1 \text{ Si utiliza técnica 1.} \\ 2 \text{ Si utiliza técnica 2.} \\ \cdot \\ \cdot \\ n \text{ Si utiliza técnica n.} \end{cases}$ (0,6 pto.)

Variable de estado: Y_k = Cantidad de dinero disponible para la etapa k. (0,4 ptos.)

Recurrencia: $Y_{k+1} = Y_k - G_{k, X_k}$ (0,3 ptos.)

Beneficio Acumulado:

$$V_k(X_k, Y_k) = SP_{k, X_k} + V_{k+1}^*(Y_{k+1}) \quad (0,6 \text{ ptos.})$$

Beneficio Máximo:

$$V_k^*(Y_k) = \max_{\substack{X_k \\ s.a. Y_k \geq G_{k, X_k}}} V_k(X_k, Y_k) \quad (0,3 \text{ ptos.})$$

Condiciones de Borde:

$$Y_1 = 300.000 \quad (0,2 \text{ ptos.})$$

$$V_{10}^*(Y_{10}) = 0 \quad (0,2 \text{ ptos.})$$

b) (3 ptos.) Solución para tres piezas:

Comedor: (0,8 ptos.)

Y_3	X_3	1	2	3	V_3^*	X_3^*
60.000		20.000	60.000	70.000	70.000	3
40.000		20.000	60.000	-	60.000	2
20.000		20.000	-	-	20.000	1

Salón de descanso: (1 pto.)

Y_2	X_2	1	2	3	V_2^*	X_2^*
80.000		120.000	100.000	120.000	120.000	1,3
60.000		110.000	60.000	80.000	110.000	1
40.000		90.000	-	-	90.000	1

Hall: (1 pto.)

Y_1	X_1	1	2	3	V_1^*	X_1^*
100.000		160.000	140.000	150.000	160.000	1

Con lo anterior se obtienen dos políticas óptimas: (0,2 ptos.)

X_1^*	1	1
X_2^*	1	3
X_3^*	3	2

Dudas y/o Consultas
xschultz@ing.uchile.cl