Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Auxiliares: André Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

Auxiliar N°5

30 de Abril de 2008

Problema 1

a) ¿Cómo sabe usted que una forma canónica entrega una solución básica no factible? Explique como resolvería usted un problema de programación lineal a partir de una forma básica no factible.
b) Dado un problema de programación lineal en forma estándar, defina el problema que se resuelve para la Fase I del SIMPLEX. Explique por qué en este problema auxiliar se puede obtener una solución inicial factible en forma sencilla.
c) Comente la siguiente afirmación: "La Fase I del Algoritmo Simplex finaliza cuando todas las variables artificiales salen de la base".

Problema 2

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \max & z = x_1 + x_2 + 3x_3 \\
 & s.a & x_1 + x_3 \leq 2 \\
 & & x_2 + x_3 \leq 2 \\
 & & x_3 \geq 1 \\
 & & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

a) Transforme el problema llevándolo a forma estándar.
b) Aplicando Fase I, determine una solución básica factible inicial.
c) Resuelva el problema utilizando Simplex.
d) Indique qué características presenta esta solución óptima:
   i. ¿Es el problema no acotado?
   ii. ¿Existen óptimos alternativos?
   iii. ¿Existen restricciones redundantes?
   iv. ¿Es la solución óptima degenerada?

Problema 3

I) Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & Máx & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
 & s.a & \\
 & & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,\ldots,m \\
 & & x_j \geq 0 \quad j = 1,\ldots,n
\end{array}
$$

a) Amplifique cada restricción i por un multiplicador $y_i \geq 0$. Luego, obtenga la inecuación resultado de sumar cada una de las m restricciones.

b) Determine qué condición debe satisfacer cada coeficiente de la función objetivo del problema (P), para que el término $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ sea una cota superior a la función objetivo del problema (P).

c) Escriba el problema de optimización que permita encontrar el valor de los multiplicadores $y_i \geq 0$ que determinen la mínima cota superior $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ a la función objetivo del problema (P). ¿Con que nombre conoce este problema y los multiplicadores y_i? ¿Qué teorema acaba de verificar?

II) Responda las siguientes preguntas:

a) Plantee y describa con palabras el significado del Teorema Fundamental de Dualidad y del Teorema de Holgura Complementaria.
b) Dé una explicación sobre el significado económico del óptimo dual. Justifique la respuesta.
c) Considere un modelo de optimización para planificar la construcción de sillas y mesas, en el cual se tienen 3 recursos escasos: madera, fierro y horas/hombre por semana. Sean y_m, y_f, y_{hh} las variables duales asociadas a estas tres restricciones respectivamente, obtenidas al resolver una instancia particular. Evalúe las siguientes propuestas:
    1. Si en el óptimo la variable de holgura de la restricción asociada a la madera vale cero, que valores puede tomar la variable de dual asociada a esa restricción. ¿Estaría dispuesto a comprar 1 unidad de madera a un precio ($y_m + 1$)? Justifique.
    2. No se conoce el valor de la variable dual y_f. Pero se sabe que la restricción del problema primal asociada al fierro es no activa. Sin hacer nuevos cálculos, ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por una unidad de fierro adicional? Justifique.
    3. Un nuevo trabajador desea trabajar para Ud. y le ofrece trabajar 45 horas a la semana a un precio de ($y_{hh} - 1$) cada hora. ¿Aceptaría la propuesta? Justifique.

Problema 4

Sea (P) el siguiente problema:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max } 2x1 + x2 & & \text{(P)} \\
\text{s.a} \quad x1 + x2 \leq 3 & & \\
\quad - x1 + x2 \leq 1 & & \\
\quad 3x1 - 2x2 \leq 4 & & \\
\quad x1, x2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

a) Grafique el conjunto factible de (P) y determine la solución óptima gráficamente. ¿Cuál es el valor de z*?
b) Formula el dual del problema (P). Encuentre la solución óptima del dual usando el teorema de holgura complementaria y verifique que el valor del óptimo de la función objetivo de ambos problemas coinciden.
c) i. Explique cual es la interpretación económica de la solución dual.
   ii. Suponga que x_1 y x_2 representan la cantidad a producir de dos productos, y que las restricciones 1,2 y 3 representan la utilización de 3 insumos diferentes A, B y C. Si a Ud. le dan dinero para invertir en insumos, ¿en cuál invertiría? Justifique.

Solución:

Problema 1

a) Si $\overline{b_i} < 0$ entonces la forma canónica entrega una solución básica no factible. Se debe agregar variables artificiales y desarrollar una fase 1 y luego la fase 2.

b) El problema de Fase I tiene la siguiente estructura:

$$Ax + It = b$$
$$x, t \geq 0$$

Donde $t \in R^m$, t variables artificiales.
Para recuperar el problema original, se debe forzar a todas las variables artificiales a tomar valor 0. ($Ax = b$, $Ax + It = b$ con $t = 0$).

$$\min \quad w = \sum_i t_i$$
$$Ax + It = b$$
$$x, t \geq 0$$

La solución básica factible inicial es $x = 0$ y $t = b$, $B = I$. Lo sencillo acá es que en este caso la identidad sirve como solución factible básica inicial. Notar que como $t = b$ debemos preocuparnos de hacer el vector $b \geq 0$ en el caso que no lo sea, de lo contrario la identidad no será una base factible inicial.

c) Falso. La fase I termina una vez que se encuentra el óptimo w* del problema auxiliar. Sin embargo, la base óptima puede contener variables auxiliares. Por ejemplo, si $w^* > 0$ el problema original es infactible y necesariamente al menos una de las variables auxiliares es básica.

Problema 2

a) Forma estándar:

$$\text{Min - } z = -x_1 - x_2 - 3x_3$$
$$s.a.$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 2$$
$$x_2 + x_3 + x_5 = 2$$
$$x_3 - x_6 = 1$$
$$x_i \geq 0$$

b) Para aplicar Fase I, se puede resolver alguno de los dos siguientes problemas:

$$\begin{gathered}\text{Min } t_1 + t_2 + t_3 \\ s.a. \\ x_1 + x_3 + x_4 + t_1 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_5 + t_2 = 2 \\ x_3 - x_6 + t_3 = 1 \\ x_i \geq 0, t_i \geq 0\end{gathered}$$

O bien, uno simplificado:

$$\begin{gathered}\text{Min } t_1 \\ s.a. \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_3 - x_6 + t_1 = 1 \\ x_i \geq 0, t_i \geq 0\end{gathered}$$

Resolvamos este último problema:

Iteración 1:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_4 & X_5 & t_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow B^{-1} = I \Rightarrow \overline{b} = b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ t_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,0,0,0) - (0,0,1) \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\overline{c}_R = (0,0,-1,1)$$

Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que X_3 entra a la base.

$$\overline{A}_{\bullet 3} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 3} = I \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Criterio de Salida:

$$\min \left\{ \overset{X_4}{\frac{2}{1}}, \overset{X_5}{\frac{2}{1}}, \overset{t_1}{\frac{1}{1}} \right\} = \min\{2,2,1\} = 1$$

Entonces, t_1 sale de la base.

Iteración 2:

$$B=\begin{array}{c}\begin{matrix}X_4 & X_5 & X_3\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \bar{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_4\\x_5\\x_3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\t_1\\x_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R=c_R-c_BB^{-1}R=(0,0,1,0)-(0,0,0)$$

$$\bar{c}_R=(0,0,1,0)$$

Solución óptima

Como la solución óptima nos indica que $t_1=0$, la suma óptima de variables artificiales es nula y por tanto las podemos eliminar obteniendo un vértice factible para el problema original. Además, como ninguna variable artificial está en la base óptima de fase I, entonces podemos tomar dicha base como vértice inicial para la fase II.

Luego, la base óptima de Fase I:

$$B=\begin{array}{c}\begin{matrix}X_4 & X_5 & X_3\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

Es una base primal factible para el problema original.

NOTA:

Si la suma óptima de variables artificiales es nula, pero existen variables artificiales en la base óptima de fase I, entonces podemos intentar reemplazarla por cualquier variable no básica para formar una base factible para la fase II.

Si la suma óptima de variables artificiales es no nula, significa que alguna variable artificial es positiva y por tanto no la podemos eliminar. En dicho caso, el problema es infactible.

c) **Iteración 1 (Fase II):**

De acuerdo a la parte b) partimos con la base factible:

$$B=(A4,A5,A3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\bar{b}=B^{-1}\cdot b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\bar{c}_r=(-1,-1,-3)\Rightarrow$ Solución no es óptima por lo que entra x_6

$$\bar{A}_{\bullet 6}=B^{-1}\cdot A_{\bullet 6}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{Min}\ \{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{i6}};\overline{a}_{i6}>0\} = \text{Min}\{\frac{1}{1};\frac{1}{1}\} = 1$$

En el criterio de salida hay empate. Luego, podemos predecir que encontraremos una solución degenerada. Escojamos X_4 como variable que sale de la base (podríamos escoger X_5 también).

Iteración 2 (Fase II):

Tenemos ahora la base:

$$B = (A6, A5, A3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_r = (2,-1,3) \Rightarrow \text{Solución no es óptima y sale } x_2$$

$$\overline{A}_{\bullet 2} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min}\ \{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{i2}};\overline{a}_{i2}>0\} = \text{Min}\{\frac{0}{1}\} = 0 \Rightarrow \text{Sale } x_5$$

Iteración 3 (Fase II):

Tenemos ahora la base:

$$B = (A6, A2, A3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\overline{c}_r = (1,1,2)$

Luego, como todos los costos reducidos son mayores que cero, la solución es óptima. Entonces, en el óptimo las variables básicas valen: $X_6=1$; $X_2=0$; $X_3=2$ y las no básicas valen todas cero: $X_1=0$; $X_4=0$; $X_5=0$.

d)

i. ¿Es el problema no acotado?
El problema es acotado pues: -z*= -6 => z*=6

ii. ¿Existen óptimos alternativos?
No existen múltiples soluciones óptimas, pues $\overline{c}_R > 0$ en el óptimo, es decir, no existe ninguna variable no básica con costo reducido nulo.

iii. ¿Existen restricciones redundantes?
No existen restricciones redundantes. Además, ninguna restricción es una combinación lineal de las otras.

iv. ¿Es la solución óptima degenerada?
La solución óptima es degenerada pues el vértice óptimo con cualquiera de sus bases posee una variable básica igual a cero.

Problema 3

I.a) Tenemos el problema:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & Máx & z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
 & s.a & \\
 & & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i=1,\ldots,m \\
 & & x_j \geq 0 \quad j=1,\ldots,n
\end{array}
$$

Si amplificamos la restricción i por un multiplicador $y_i \geq 0$:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \leq b_i y_i$$

Luego, si sumamos las m ecuaciones obtenemos:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \leq b_i y_i \quad \Big/ \quad \sum_{i=1}^{m}(\;)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

I.b) Debemos encontrar una condición sobre cada c_j tal que el lado derecho de la inecuación anterior sea una cota superior al valor de la función objetivo del problema (P).
Notemos que podemos intercambiar las sumatorias del lado izquierdo de la inecuación:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i\right) x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Como el término $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i$ sólo depende de j llamémoslo d_j. Entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Notemos que si $c_j \leq d_j \;\; \forall j=1,\ldots,n$ entonces se cumplirá que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Es decir:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Por lo tanto, el término $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ será una cota superior al valor de la función objetivo del problema (P) si $c_j \leq d_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \;\; \forall j = 1,...,n$.

I.c) Debemos encontrar el mínimo valor de $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ bajo la condición de que $c_j \leq d_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \;\; \forall j = 1,...,n$. Entonces el problema de optimización es:

$$\begin{array}{lll} (D) & Mín & w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ & s.a & \\ & & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1,...,n \\ & & y_i \geq 0 \quad i = 1,...,m \end{array}$$

Este problema (D) es el problema Dual del primal (P). Acabamos de verificar el teorema débil de dualidad, que establece que si tememos un problema de maximización entonces: el valor de la función objetivo de su dual, evaluada en cualquier solución factible (del dual), siempre es una cota superior del valor de la función objetivo del primal, evaluada en cualquier solución factible (del primal).

II.a) El Teorema fundamental de Dualidad establece que si el problema primal (P) tiene solución óptima entonces su dual (D) tiene solución óptima y el valor óptimo de sus funciones objetivo tienen el mismo valor. Es decir, $z* = w*$.

El Teorema de Holgura Complementaria otorga una condición necesaria y suficiente para que soluciones factibles de (P) y (D) sean óptimos de (P) y (D) respectivamente: Sea x^* una solución factible de (P) e y^* una solución factible de (D). Las siguientes son condiciones necesarias y suficientes para optimalidad simultánea de x^* e y^*:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) y_i^* = 0 \quad \forall i = 1,..., m$$
$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* = 0 \quad \forall j = 1,..., n$$

II.b) Supongamos que cada restricción $i = 1,..., m$ del problema (P) representa la restricción de disponibilidad de algún recurso i, del que se dispone de b_i unidades ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$). Consideremos el siguiente problema, extendido a partir de (P), donde aumentamos la disponibilidad de cada recurso i en t_i:

$$
\begin{aligned}
&Máx \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&s.a \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + t_i \quad i = 1,..., m \\
&\qquad x_j \ge 0 \quad j = 1,..., n
\end{aligned}
$$

Se puede demostrar que si el problema original (P) tiene al menos una solución óptima básica no degenerada, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que si $|t_i| < \varepsilon \quad \forall i = 1,..., m$ el problema anterior tiene solución óptima y el valor óptimo de su función objetivo es $z^* + \sum_{i=1}^{m} t_i y_i^*$.

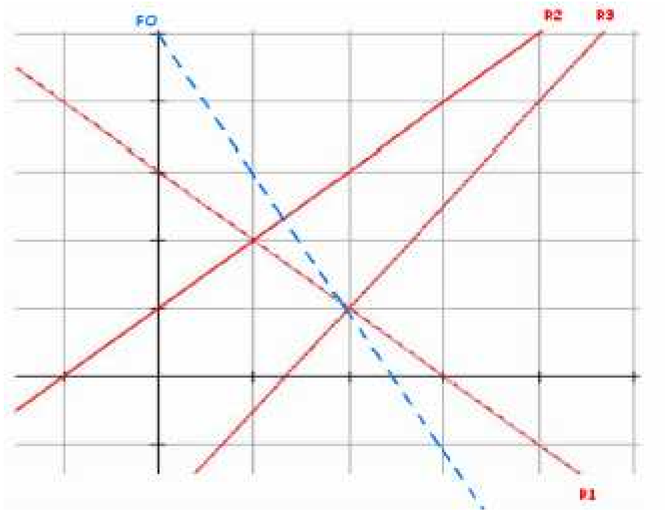
A partir de este resultado es posible concluir que la variable dual i en el óptimo y_i^* (la asociada a la restricción i), representa el aumento del valor de la función objetivo de (P) ante el aumento en una unidad de la disponibilidad del recurso i (del parámetro b_i). O sea, representa el valor marginal del recurso i y si tuviéramos que pagar cierta cantidad de dinero por una unidad extra del recurso i, pagaríamos hasta y_i^* pesos (suponiendo que la función objetivo está medida en pesos).

II.c)

1. Si la variable de Holgura asociada la restricción de madera vale cero, quiere decir que la restricción es activa, por lo que estaría dispuesto a comprar una unidad adicional de madera a un precio máximo de y_m. Como en este caso el precio es superior a y_m, no me conviene, puesto que mi ganancia es menor que el precio que debo pagar.
2. Como la restricción asociada al fierro es pasiva, quiere decir que "me sobra fierro" por lo tanto no me sirven nuevas unidades de fierro para aumentar mi beneficio, por lo que sin hacer nuevos cálculos debería rechazar la propuesta a menos que el precio fuera cero.
3. Si bien conviene comprar la primera unidad de HH al precio ofertado, nadie garantiza que para el resto de las horas sea conveniente el precio ofertado, por lo que no tengo información suficiente para tomar la decisión respecto de la propuesta.

Pregunta 4

a) Gráficamente:



Se puede observar que el óptimo se encuentra en la intersección de de R_1 con R_3. Esto es, el punto (2,1), y el valor de la función objetivos es 5.

b) El dual del problema queda:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \min & 3y_1 + y_2 + 4y_3 \\
 & s.a & y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 2 \\
 & & y_1 + y_2 - 2y_3 \geq 1 \\
 & & y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{array}
$$

Por el teorema de Holgura Complementaria se tiene la condición necesaria y suficiente para que x_* e y_* sean óptimos:

$$
\begin{array}{ll}
\left(A_{i\bullet} \cdot x^* - b_i\right) \cdot y_i^* = 0 & \forall i \\
\left(c_j - y^* \cdot A_{\bullet j}\right) \cdot x_j^* = 0 & \forall j
\end{array}
$$

Donde A es la matriz de los coeficientes que acompañan a las variables del problema primal en las restricciones (no considerando las variables artificiales). Esto es:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}
$$

Entonces, sabiendo que, en el óptimo $x_1=2$ y $x_2=1$, se tiene que:

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-3\right)\cdot y_1^* = (x_1+2x_2-3)\cdot y_1^* = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-1\right)\cdot y_2^* = (-x_1+x_2-1)\cdot y_2^* = 0 \Rightarrow y_2^* = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-4\right)\cdot y_3^* = (3x_1-2x_2-4)\cdot y_3^* = 0$$

$$\left(2-\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix}\right)\cdot x_1^* = (2-y_1+y_2-3|y_3)\cdot x_1^* \Rightarrow 2 = y_1-y_2+3y_3$$

$$\left(1-\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}\right)\cdot x_2^* = (1-y_1-y_2+2y_3)\cdot x_1^* \Rightarrow 1 = y_1+y_2-2y_3$$

$$y_1 = 7/5,\ y_2 = 0 \text{ y } y_3 = 1/5$$

Luego el valor de la función óptima es:

$$3\cdot 7/5 + 4\cdot 1/5 = 5.$$

Noten que el valor de la función objetivo en el óptimo es el mismo para el primal que para el dual. Esto se debe al Teorema Fundamental de la Dualidad.

También noten que los valores de las variables duales en el óptimo también pueden calcularse como los precios sombra:

$$(\pi = c_B^T\cdot B^{-1} = (1 \quad 0 \quad 2)\begin{pmatrix}3/5 & 0 & -1/5\\ -1/5 & 1 & 2/5\\ 2/5 & 0 & 1/5\end{pmatrix} = (7/5 \quad 0 \quad 1/5)).$$

C)
i. Las variables duales miden el valor unitario en $ del recurso al que se relacionan. En el fondo es el valor marginal del recurso i (lo que aumenta el beneficio por cada unidad extra de recursos i). Entonces, si tenemos que pagar cierta cantidad dinero por una unidad extra del recurso i, sabemos que nos conviene pagar hasta el valor del precio sombra.
ii. Dado a que $y_1 > y_3 > y_2$, conviene invertir en el insumo A pues al aumentar en una unidad su cantidad, aumenta en 7/5 el valor de la función objetivo.

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
acarboni@ing.uchile.cl