Ondas Esféricas

Un campo que describe a una onda en 3D debe satisfacer la ecuación de ondas:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

En general este campo tiene una dependencia $\psi = \psi(\vec{r}, t)$. Pero si el campo posee simetría esférica (lo que se espera de una onda esférica) la dependencia pasa a ser $\psi = \psi(r, t)$ donde $r \equiv \|\vec{r}\|$. Al sustituir este nuevo campo en la ecuación de ondas podemos "echarnos" la parte angular del Laplaciano (escrito en coordenadas esféricas) y mantener sólo las derivadas parciales con respecto a r, obteniendo la ecuación:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Multiplicando toda la ecuación por r:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi)$$

y definiendo $u(r, t) = r\psi(r, t)$ la ecuación que nos queda es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

la típica ecuación de ondas unidimensional. La gracia es que conocemos su solución:

$$u(r, t) = Ae^{i(kr-\omega t)}$$

donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$ y A es la amplitud. Deshaciendo la definición de $u(r, t)$ obtenemos lo buscado:

$$\psi(r, t) = A\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

La interpretación que le damos a este campo es una perturbación que se desplaza radialmente desde el origen $r = 0$. En otras palabras la fuente se encuentra en el origen. Si por algún motivo la fuente se ubica en la posición $\vec{r}_0$, simplemente desplazamos la solución:

$$\psi(\vec{r}, t) = A\frac{e^{i(k\|\vec{r}-\vec{r}_0\|-\omega t)}}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}$$

y el campo ahora describe una perturbación que se propaga radialmente desde $\vec{r}_0$.