

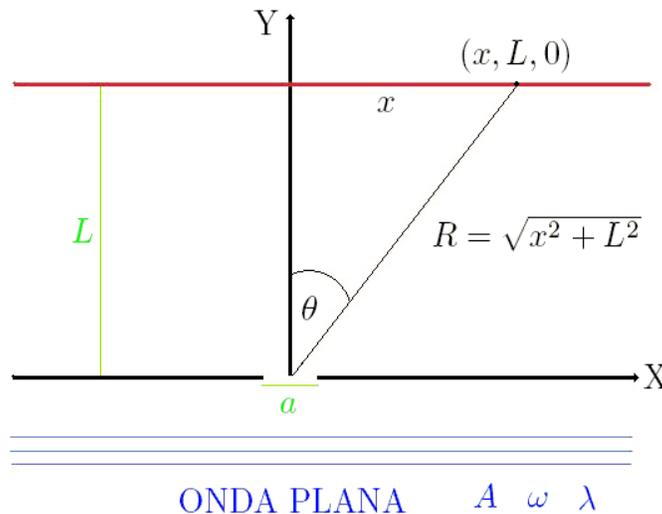
Mecánica Cuántica I

Auxiliar 1

Profesor: Hugo Arellano Auxiliar: Sebastián Díaz

19/03/2008

Difracción de Fraunhofer. Supongamos que una onda plana que se propaga en la dirección \hat{j} es obstruida por el plano $y = 0$ el cual posee una rendija como se ilustra en la figura. Determinemos los patrones de difracción observados a una distancia grande L comparada con el ancho a de la rendija ($a \ll L$). Esta es la llamada aproximación de Fraunhofer.



Por el *Principio de Huygens* suponemos que desde la rendija, la onda plana se modela como $N + 1$ fuentes puntuales (N será un número par muuuy grande) que emiten ondas esféricas con la misma frecuencia ω y longitud de onda λ de la onda plana, pero por conservación de la energía, su amplitud es $\frac{A}{N+1}$. Dicho de otra forma, repartimos equitativamente la energía entre las $N + 1$ fuentes.

Situemos las fuentes en las posiciones $\vec{r}_j = r_j \hat{i}$ con:

$$\begin{aligned} r_j &\equiv j\delta & j \in \{-N/2, \dots, 0, \dots, N/2\} \\ \delta &\equiv \frac{a}{N} \end{aligned}$$

Los campos que describen a las ondas esféricas que emite cada una de las fuentes quedan dados por:

$$\psi_j(\vec{r}, t) = \frac{A}{N+1} \frac{e^{i(\|\vec{r}-r_j\hat{i}\|k-\omega t)}}{\|\vec{r}-r_j\hat{i}\|}$$

Haciendo uso de $a \ll L$ podemos hacer las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned} \|\vec{r}-r_j\hat{i}\| &= [(x-r_j)^2 + L^2]^{1/2} \\ &\approx [x^2 + 2xr_j + L^2]^{1/2} && (r_j^2 \sim o(a^2) \sim 0) \\ &= \sqrt{x^2 + L^2} \left(1 - \frac{2xr_j}{x^2 + L^2}\right)^{1/2} \\ &\approx \sqrt{x^2 + L^2} \left(1 - \frac{xr_j}{x^2 + L^2}\right) \\ &= R \left(1 - \frac{xr_j}{R^2}\right) && (R = \sqrt{x^2 + L^2}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|\vec{r}-r_j\hat{i}\|} \approx \frac{1}{R} \left(1 + \frac{xr_j}{R^2}\right)$$

En la posición $\vec{r} = (x, L, 0)$ la perturbación total $\Psi(\vec{r}, t)$ corresponde a la contribución de todas nuestras fuentes $\psi_j(\vec{r}, t)$:

$$\begin{aligned}
\Psi(\vec{r}, t) &\equiv \sum_{j=-N/2}^{N/2} \psi_j(\vec{r}, t) \\
&= \sum_{j=-N/2}^{N/2} \frac{A}{N+1} \frac{e^{i(\|\vec{r}-r_j\|k-\omega t)}}{\|\vec{r}-r_j\|} \\
&\approx \frac{Ae^{-i\omega t}}{N+1} \sum_{j=-N/2}^{N/2} \frac{1}{R} \left(1 + \frac{xr_j}{R^2}\right) e^{i(Rk - \frac{xr_j}{R}k)} \quad (\text{usando las aproximaciones}) \\
&= \frac{A}{N+1} \frac{e^{i(Rk-\omega t)}}{R} \sum_{j=-N/2}^{N/2} \left(1 + \frac{r_j}{R} \sin \theta\right) e^{-ik \sin \theta r_j} \quad \left(\frac{x}{R} = \sin \theta\right) \\
&= \frac{A}{N+1} \frac{e^{i(Rk-\omega t)}}{R} \sum_{j=-N/2}^{N/2} e^{-ik \sin \theta r_j} \quad (r_j < a \ll L < R \Rightarrow \frac{r_j}{R} < \frac{a}{L} \sim 0) \\
&= \frac{A}{N+1} \frac{e^{i(Rk-\omega t)}}{R} \sum_{j=-N/2}^{N/2} e^{bj} \quad (b \equiv -ik \sin \theta \delta \equiv -i\beta)
\end{aligned}$$

Para calcular la suma que nos quedó en la última línea, nos será de utilidad calcular lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N/2} e^{bj} &= \frac{e^{(N/2+1)b} - 1}{e^b - 1} \quad \left(\sum_{j=0}^M a^j = \frac{a^{M+1} - 1}{a - 1}\right) \\
&= \frac{e^{(\frac{N}{2}+1)\frac{b}{2}} \left[e^{(\frac{N}{2}+1)\frac{b}{2}} - e^{-(\frac{N}{2}+1)\frac{b}{2}}\right]}{e^{\frac{b}{2}} \left[e^{\frac{b}{2}} - e^{-\frac{b}{2}}\right]} \\
&= e^{(\frac{N}{2})\frac{b}{2}} \frac{\sinh\left[\left(\frac{N}{2}+1\right)\frac{b}{2}\right]}{\sinh\left(\frac{b}{2}\right)} \quad \text{y } b = -i\beta \\
&= e^{-i(\frac{N}{2})\frac{\beta}{2}} \frac{\sin\left[\left(\frac{N}{2}+1\right)\frac{\beta}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \quad (\sinh(i\alpha) = i \sin \alpha)
\end{aligned}$$

En lo que sigue haremos uso de lo recién demostrado para determinar la suma inicial.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-N/2}^{N/2} e^{bj} &= \sum_{j=-N/2}^{-1} e^{bj} + \sum_{j=0}^{N/2} e^{bj} \\
&= \sum_{j=1}^{N/2} e^{-bj} + 1 + \sum_{j=0}^{N/2} e^{bj} - 1 \\
&= \sum_{j=0}^{N/2} e^{-bj} + \sum_{j=0}^{N/2} e^{bj} - 1 \\
&= e^{i(\frac{N}{2})\frac{\beta}{2}} \frac{\sin\left[\left(\frac{N}{2}+1\right)\frac{\beta}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} + e^{-i(\frac{N}{2})\frac{\beta}{2}} \frac{\sin\left[\left(\frac{N}{2}+1\right)\frac{\beta}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} - 1 \\
&\approx \frac{2 \cos\left[\left(\frac{N}{2}\right)\frac{\beta}{2}\right] \sin\left[\left(\frac{N}{2}\right)\frac{\beta}{2}\right]}{\sin\frac{\beta}{2}} - 1 \quad (N/2+1 \sim N/2) \\
&\approx \frac{\sin\left[N\frac{\beta}{2}\right]}{\frac{\beta}{2}} - 1 \quad (\beta \propto \delta \ll 1 \Rightarrow \sin\frac{\beta}{2} \approx \frac{\beta}{2}) \\
&= \frac{\sin\left[N\frac{k}{2} \sin\theta\frac{a}{N}\right]}{\frac{k}{2} \sin\theta\frac{a}{N}} - 1 \\
&= \frac{\sin\left[\frac{k}{2}a \sin\theta\right]}{\frac{k}{2}a \sin\theta} N - 1 \\
&= \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\lambda}a \sin\theta\right]}{\frac{\pi}{\lambda}a \sin\theta} N - 1 \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Así, Ψ se aproxima como:

$$\begin{aligned}
\Psi &\approx \frac{A}{N+1} \frac{e^{i(Rk-\omega t)}}{R} \left(\frac{\sin\left[\frac{\pi}{\lambda}a \sin\theta\right]}{\frac{\pi}{\lambda}a \sin\theta} N - 1 \right) \\
&= A \frac{e^{i(Rk-\omega t)}}{R} \left(\frac{\sin\left[\frac{\pi}{\lambda}a \sin\theta\right]}{\frac{\pi}{\lambda}a \sin\theta} \frac{N}{N+1} - \frac{1}{N+1} \right) \\
&\approx A \frac{e^{i(Rk-\omega t)}}{R} \left(\frac{\sin\left[\frac{\pi}{\lambda}a \sin\theta\right]}{\frac{\pi}{\lambda}a \sin\theta} \right) \quad \left(\frac{N}{N+1} \approx 1; \quad \frac{1}{N+1} \approx 0 \right) \\
\Rightarrow |\Psi|^2 &\approx \left| A \frac{e^{i(Rk-\omega t)}}{R} \right|^2 \left(\frac{\sin\left[\frac{\pi}{\lambda}a \sin\theta\right]}{\frac{\pi}{\lambda}a \sin\theta} \right)^2
\end{aligned}$$

Notando que:

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 &\propto I(\theta) \\ \left| A \frac{e^{i(Rk-\omega t)}}{R} \right|^2 &\propto I_0 \\ \Rightarrow \frac{I(\theta)}{I_0} &\approx \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \right]}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \right)^2 \end{aligned}$$

I_0 depende de θ y corresponde a la intensidad que generaría una fuente puntual de amplitud A , longitud de onda λ y frecuencia ω , ubicada en el centro de la rendija. Este no es el comportamiento que nos interesa y por eso dividimos por I_0 .

Les dejo propuesto graficar la función $\left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \right]}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \right)^2$ para distintos valores de a y λ y en particular observen lo que sucede en los casos:

- $a \ll L$
- $a \gg L$