Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

FI34A-04 Física Contemporánea

Control 1 (PAUTA)

Profesor: **Sebastián López**
Auxiliares: Gabriela Covarrubias
Gustavo Castillo

31 de Marzo de 2008

1. (a) ¿Cuán rápido se debe viajar para alcanzar el centro de nuestra galaxia en el lapso de una vida humana (e.g., 60 años)? Asuma una distancia de 30 000 años-luz al centro de la Via Láctea.

   Sea d la distancia al centro de la galaxia (medida en un sistem S en la Tierra), Δt el tiempo que tarda la nave en completar el viaje según lo que se ve desde S, y $\Delta t'$ el tiempo medido en S', dentro de la nave. Definimos la velocidad de S' con respecto a S como v, la incógnita del problema. Entonces se tiene que:

   $$\Delta t = d/v$$

   y:

   $$\gamma \Delta t' = \Delta t$$

   (por diltación del tiempo). De aquí se deriva que:

   $$v^2 = \frac{d^2}{(\Delta t'^2 + d^2/c^2)}$$

   . Usando que $d = 30\,000[\text{años}]\times c$, se tiene que:

   $$v = c \times \frac{30\,000}{\sqrt{(60^2 + 30\,000^2)}} = 0.999998\ c$$

   (b) ¿Hasta qué distancia podría llegar un humano en los mismos 60 años de viaje si su nave viaja al 50% de c?

   Usando la fórmula anterior, pero despejando d con $v = 0.5c$:

   $$d = \frac{0.5 \times c \times 60}{\sqrt{1 - 0.5^2}} = 34.64$$

   [años-luz]

2. Un proyectil es disparado a lo largo del eje x' y con velocidad $\vec{v'} = v'_x \hat{x}' + v'_z \hat{z}' + v'_z \hat{z}'$ en un sistema S', el cual se mueve con velocidad $\vec{u} = u\hat{x}$ con respecto a un sistema S. ¿Cuál es la velocidad $\vec{v}$ del proyectil medida por un observador en S?

   (a) Comience preguntándose por $v_x = dx/dt$, use regla de la cadena y las transformaciones de Lorentz normales e inversas, para expresar v_x en términos de v'_x y u.
   Si usamos las transformaciones de Lorentz,

$$x = \gamma(x' + ut')$$

$$t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$$

   y aplicamos *delta* a las ecuaciones (diferenciamos)...

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$$

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{u\Delta x'}{c^2})$$

   Dividiendo queda ...

$$v_x = \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\Delta t' + \frac{u\Delta x'}{c^2}}$$

   Si dividimos por $\Delta t'$ arriba y abajo...

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}$$

   Donde se usó que $\frac{dx}{dt} = v_x$ y $\frac{dx'}{dt'} = v'_x$
   Esta es la expresión que se obtiene para la velocidad v_x que mide el sistema S en función de la velocidad relativa entre los 2 sistemas u, y la velocidad que mide el sistema S', v'_x.

   (b) Repita para v_y y v_z.
   Para obtener las expresiones de v_y y v_z se procede en forma similar. Dado que el movimiento relativo entre los 2 sistemas es solo a lo largo del eje x, tenemos que:

$$\Delta y = \Delta y' \qquad \Delta z = \Delta z'$$

   Ademas de

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{u\Delta x'}{c^2})$$

   Si hacemos el mismo procedimiento que en la parte anterior, tenemos que...

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{uv'_x}{c^2})}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 + \frac{uv'_x}{c^2})}$$

(c) Explique por qué $v'_y \neq v_y$ y $v'_z \neq v_z$, siendo que S' se mueve a lo largo del eje x.

La discrepancia que se observa en las velocidades a lo largo del eje y y del eje z se debe a que, a pesar de que la contraccion de Lorentz se produce solo a lo largo del eje x, el tiempo que miden los sistemas S y S' es distinto, y esto produce finalmente que las velocidades que miden los 2 sistemas sea diferente.

(d) Si en el sistema S' reemplazamos el proyectil por un fotón, verifique que $\vec{v} = c$, como se espera del segundo postulado de la Relatividad Especial.

Por simplicidad supongamos ahora que el fotón se mueve en una sola direccin, digamos el eje x. Entonces su velocidad en el sistema S' será $v'_x = c$. De acuerdo a lo calculado en la parte a) se tiene,

$$v_x = \frac{c + u}{1 + \frac{uc}{c^2}}$$

Si simplificamos se obtiene que $v_x = c$. Esto claramente coincide con lo que dice el segundo postulado de la Relatividad Especial, es decir, que la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales.

(e) Usted acaba de derivar la composición de velocidades en Relatividad Especial y está ahora en posición de resolver fácilmente problemas como éste: Dos naves espaciales se aproximan desde posiciones opuestas en un sistema inercial. Si la velocidad de cada una de ellas es de $0,9c$, calcule la velocidad relativa entre las naves.

Notar primero que si usamos la suma de velocidades de Galileo obtendriamos que la velocidad relativa entre las naves es de $v_x = 0.9c + 0.9c = 1.8c$, lo que claramente contradice a la relatividad especial, puesto que no se pueden lograr velocidades mayores a c. Si ahora usamos la suma de velocidades relativista…

$$v_x = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + 0.9 \cdot 0.9} \approx 0.994c$$

Y esto sí que concuerda con la relatividad especial!!