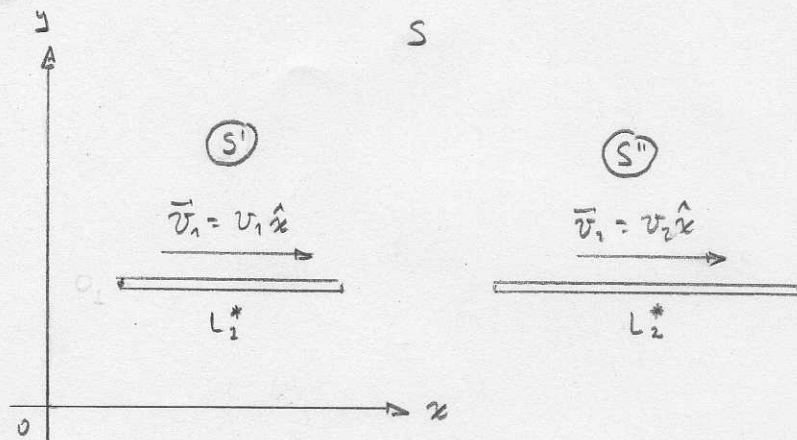


P1/

Usamos la convención

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \neq 1$$

Factor de Lorentz:

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

↑
oso!

Sean S, S', S'' sistemas inerciales solidarios al origen O y a cada barra la transformación de Lorentz que relaciona los eventos registrados por S y S' es:

$$x' = \gamma(v_1)(x - v_1 t) \quad t' = \gamma(v_1)\left(t - \frac{v_1}{c^2} x\right)$$

a) Según S , la barra 2 se mueve con velocidad $v_2 = \frac{dx_2}{dt_2}$

$$\text{Según } S' \quad v'_2 = \frac{dx'_2}{dt'_2} = \frac{d(\gamma(v_1)(x_2 - v_1 t_2))}{d(\gamma(v_1)(t_2 - \frac{v_1}{c^2} x_2))} = \frac{\gamma(v_1)(dx_2 - v_1 dt_2)}{\gamma(v_1)(dt_2 - \frac{v_1}{c^2} dx_2)}$$

$$= \frac{\gamma(v_1)(v_2 dt_2 - v_1 dt_2)}{\gamma(v_1)(dt_2 - \frac{v_1}{c^2} v_2 dt_2)} = \frac{\gamma(v_1)(v_2 - v_1) dt_2}{\gamma(v_1)(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}) dt_2} = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} //$$

Análogamente, la velocidad de la barra 1 según S'' es:

$$v_1'' = \frac{dx_1''}{dt_1''} = \frac{\gamma(v_2)(dx_1 - v_2 dt_1)}{\gamma(v_2)(dt_1 - \frac{v_2}{c^2} dx_1)} = \frac{\gamma(v_2)(v_1 - v_2) dt_1}{\gamma(v_2)(1 - \frac{v_2 v_1}{c^2}) dt_1} = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_2 v_1}{c^2}} //$$

Como era de esperarse, $v_2' = -v_1'' //$ 3.0 pts.

b) Si L_1, L_2 son las longitudes naturales de las barras, entonces sus longitudes según el sistema S son:

$$L_1^* = \frac{L_1}{\gamma(v_1)} = \sqrt{1 - (\frac{v_1}{c})^2} L_1 \quad L_2^* = \frac{L_2}{\gamma(v_2)} = \sqrt{1 - (\frac{v_2}{c})^2} L_2$$

En general, la longitud aparente de un cuerpo en movimiento según un sistema inercial es:

$$\frac{\text{longitud natural del cuerpo}}{\gamma(\text{velocidad del cuerpo según el sistema inercial en cuestión})}$$

Longitud aparente de la barra 2 según el sistema S' :

$$L_2' = \frac{L_2}{\gamma(v_2')} = \sqrt{1 - (\frac{v_2'}{c})^2} L_2 = \sqrt{1 - (\frac{c(v_1 - v_2)}{c^2 - v_1 v_2})^2} L_2 = \frac{\sqrt{c^2 - v_1^2} \sqrt{c^2 - v_2^2}}{c^2 - v_1 v_2} L_2 //$$

El último resultado se alcanza haciendo álgebra. 3.0 pts.

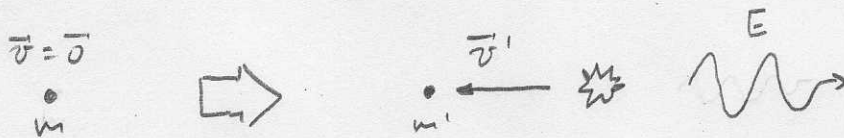
Longitud aparente de la barra 1 según el sistema S'' :

$$L_1'' = \frac{L_1}{\gamma(v_1'')} = \sqrt{1 - (\frac{c(v_1 - v_2)}{c^2 - v_1 v_2})^2} L_1 = \frac{\sqrt{c^2 - v_1^2} \sqrt{c^2 - v_2^2}}{c^2 - v_1 v_2} L_1 //$$

Notese que el factor de contracción resulta ser el mismo.

P2/ Usamos la convención $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \neq 1$

a) Usamos



Partícula Inicial:

Energía: mc^2

Momento: $\vec{0}$

Partícula Final:

Energía: $E' = \gamma(v')m'c^2$

Momento: $\vec{p}' = \gamma(v')m'\vec{v}'$

Fotón Emitido

Energía: $E = h\nu$

Momento: $\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \hat{x}$

Recordar que para toda partícula $E^2 - (\|\vec{p}\|c)^2 = (mc^2)^2$

Conservación de Energía: $mc^2 = E' + E \Leftrightarrow E' = mc^2 - E$

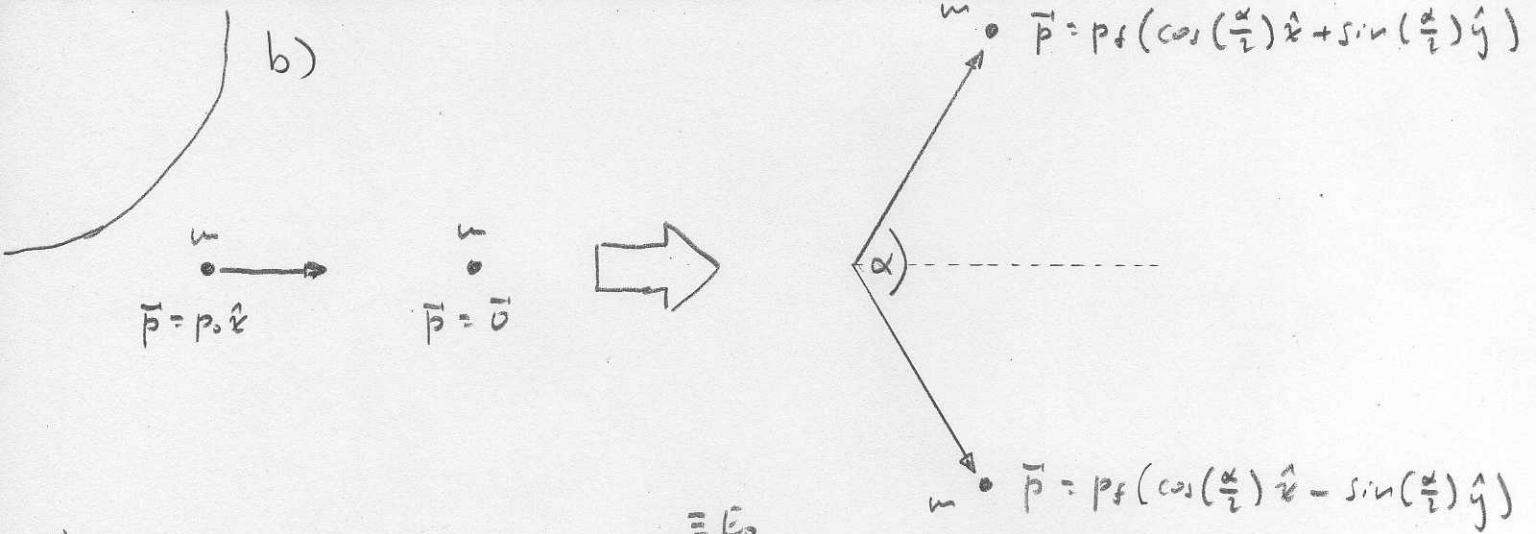
Conservación de Momento: $0 = p' + p \Leftrightarrow p' = -p = -\frac{E}{c} \hat{x}$

$$(E')^2 - (p'c)^2 = (m'c^2)^2 \Leftrightarrow (mc^2 - E)^2 - E^2 = (m'c^2)^2$$

$$(mc^2)^2 + E^2 - 2mc^2E - E^2 = (m'c^2)^2 \Leftrightarrow (m^2 - m'^2)c^4 = 2mc^2E$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{m^2 - m'^2}{2m} c^2 \quad // \quad 3.0 \text{ pts.}$$

Notese que el proceso es posible sólo si $m > m'$.



i)

Conservación de Energía: $\overbrace{(T + mc^2)}^{= E_0} + mc^2 = 2E_f \Leftrightarrow E_f = \frac{T}{2} + mc^2$

Conservación de Momentum: $p_0 = 2p_f \cos(\frac{\alpha}{2}) \Leftrightarrow \cos(\frac{\alpha}{2}) = \frac{p_0}{2p_f}$
(Eje x).

(La conservación de momento en el eje y permite inferir la simetría del problema)

Para toda partícula: $E^2 + (\|\vec{p}\|c)^2 = (mc^2)^2$

Aplicando en la partícula incidente antes y después de la interacción:

$$E_0^2 - (p_0 c)^2 = E_f^2 - (p_f c)^2 = (mc^2)^2$$

$$\Rightarrow (p_f c)^2 = E_f^2 - (mc^2)^2 = (\frac{T}{2} + mc^2)^2 - (mc^2)^2 = \frac{T^2}{4} + Tmc^2$$

$$\Rightarrow (p_0 c)^2 = E_0^2 - (mc^2)^2 = (T + mc^2)^2 - (mc^2)^2 = T^2 + 2Tmc^2$$

Reemplazando: $\cos^2(\frac{\alpha}{2}) = \left(\frac{p_0}{2p_f}\right)^2 = \frac{(p_0 c)^2}{4(p_f c)^2} = \frac{T^2 + 2Tmc^2}{T^2 + 4Tmc^2} = \frac{T + 2mc^2}{T + 4mc^2}$

Usando propiedades de la Trigonometría:

$$\cos(\alpha) = \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2}) = 2\cos^2(\frac{\alpha}{2}) - 1 = \frac{T + 2mc^2}{T + 4mc^2} - 1 = \frac{T}{T + 4mc^2} //$$

2.0 pts

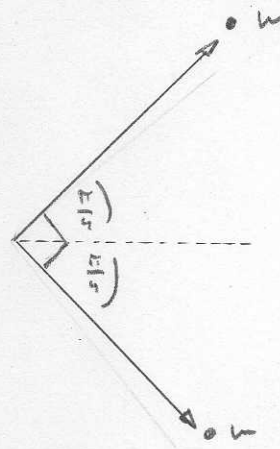
Recordando que:

$$T = E_0 - mc^2 = (\gamma(v_0) - 1)mc^2 \quad \cos(\alpha) = \frac{\gamma(v_0) - 1}{\gamma(v_0) + 1}$$

ii) Caso de bajas velocidades: $v \ll c$

Entonces, $\frac{v}{c} \approx 0$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1$

$$\cos(\alpha) = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} \approx 0 \Rightarrow \alpha \approx \frac{\pi}{2} //$$



Las partículas son despedidas con un ángulo de 90° .

Esta es de hecho una solución al problema clásico:

Energía: $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$

Momento: $mv_0 = mv_{1x} + mv_{2x}$, $0 = mv_{1y} + mv_{2y}$

Eligiendo $\vec{v}_2 = \frac{v_0}{2}(\hat{x} + \hat{y})$, $\vec{v}_1 = \frac{v_0}{2}(\hat{x} - \hat{y})$

se soluciona el problema.

0.5 pts

Caso ultra relativista: $v \approx c$

Si $v \rightarrow c$, entonces $\gamma \rightarrow \infty$, $E \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$, $\frac{1}{\gamma} \rightarrow 0$

$$\cos(\alpha) = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} = \frac{1 - \frac{1}{\gamma_0}}{1 + \frac{1}{\gamma_0}} \longrightarrow 1 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 //$$

Las dos partículas se ven en una sola > se ven con mismo momento que la partícula incidente.



Este proceso es en realidad imposible en Relatividad Especial

0.5 pts.

[Signature]