Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

FI34A-02 Pauta Control 3

Profesor: **Sebastián López**
Auxiliares: Liza Videla
Harold Francke

10 de noviembre de 2006

Pregunta 1

a) **¿Qué es un paquete de ondas? ¿Cuál es su utilidad en mecánica cuántica?**
Un paquete de ondas es la suma de varias ondas planas que viajan con una velocidad distinta a la velocidad de fase. La mecánica cuántica permite describir partículas usando funciones ondulatorias.

b) **¿Qué dice el principio de incerteza acerca de la posición y el momentum de una partícula? ¿Cuál es la relación de este principio con el ancho de un paquete de ondas?**
Ambas cantidades no pueden ser medidas simultáneamente con infinita precisión ($\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar/2$). La incerteza en la posición de un paquete (su ancho) y su dispersión en número de onda (k), frecuencia (ν), etc., cumplen el Principio de Incerteza.

c) **¿Cuál es la velocidad de fase y de grupo de un fotón de λ =550nm?**
Para un fotón, $v_g = v_f = c$.

d) **¿Qué parámetros físicos determinan la distribución espectral de energía de un cuerpo negro $E(\lambda)$?**
En la función que describe la distribución espectral de energía de un cuerpo negro sólo interviene la temperatura del cuerpo negro. OJO: La longitud de onda (equivalente a la frecuencia) es la variable de la función que describe la distribución espectral de la energía, ***NO*** el parámetro físico que determina la posición de esta distribución.

e) **Explique en qué consiste el problema de "la catástrofe ultravioleta", y cómo se solucionó.**
Clásicamente, un cuerpo negro radía infinita energía en el ultravioleta. Se solucionó discretizando la energía en "paquetes".

f) **Encuentre la longitud de onda de De Broglie para electrones de 40 keV usados en un microscopio electrónico.**

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{(K+mc^2)^2}{c^2} - m^2c^2}} = \frac{hc}{\sqrt{K^2 + 2Kmc^2 + m^2c^4 - m^2c^4}}$$

Pero $K << mc^2$, luego

$$\lambda \approx \frac{hc}{\sqrt{2Kmc^2}} = \frac{12400 \text{ Å} \cdot \text{eV}}{\sqrt{2 \cdot 40 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot 0{,}511 \cdot 10^6 \text{ eV}}} = 0{,}06 \text{ Å}$$

g) **¿Qué problemas (uno experimental y uno teórico) solucionó el modelo de Bohr?**

Experimentalmente, el modelo de Bohr explica las líneas espectrales observadas y, teóricamente, explica por qué el electrón no decae al núcleo del átomo.

h) **¿Qué unidades tiene la constante de Rydberg?**

La constante de Rydberg tiene unidades de longitud^{-1}.

i) **¿Qué proyectiles usó Rutherford en su experimento y por qué?**

Rutherford utilizó partículas α, ie., núcleos de helio. Eligió estas partículas porque son mucho más masivas que un electrón y pueden penetrar al núcleo (tienen longitudes de onda más pequeñas).

j) **¿Cuando se cuantiza un sistema, qué característica sin parangón clásico adquiere la Energía? (aparte de los niveles cuantizados)**

Existe una energía mínima que es distinta de cero.

k) **En el firmamento se pueden apreciar algunas estrellas rojizas y otras más azuladas. ¿Qué tipo corresponde a las de mayor temperatura ("efectiva")? Justifique.**

Las estrellas azules tienen mayor temperatura efectiva. Como tienen mayor temperatura el peak de emisión del cuerpo negro se corre hacia el azul, por eso se "ven" azules. OJO: el rojo está hacia longitudes de onda mayores (que es equivalente a frecuencias menores, que es equivalente a energías menores) y el azul está hacia longitdes de onda menores (que es equivalente a frecuencias mayores, que es equivalente a energías mayores)!!!

l) **¿Cuál es la relación entre v_g y v_f para las olas en el océano, si $v_f = \sqrt{g/k}$?**

Si $v_f = w/k$ entonces $w = k\sqrt{g/k}$, y como $v_g = \frac{dw}{dk} = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k}}$, tenemos que $v_f = 2v_g$.

Pregunta 2 *a*) **Encuentre las energías de una partícula de masa m encerrada en una caja de potencial infinito de tamaño L. En vez de usar De Broglie, use la cuantización de Bohr-Sommerfeld $\oint pdx = nh$, en que p es el momentum de la partícula, x su posición y n el número cuántico asociado.**

Si la partícula rebota indefinidamente, $p = |mv| = cte$, luego:

$$\begin{aligned}
\oint pdx = \int_0^L mvdx + \int_L^0 (-mv)dx &= 2mvL = nh, \\
\Rightarrow v_n = \frac{nh}{2mL} \quad \Rightarrow E &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{2} \times \frac{n^2h^2}{4m^2L^2} \\
\Rightarrow E &= \frac{h^2}{8mL^2}n^2
\end{aligned}$$

b) **¿Cuál es el menor valor que puede tomar el número cuántico obtenido?**

Sabemos que $\Delta p \Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{2}$, entonces, si $\Delta p \sim mv$ y $\Delta x \sim L$, $mvL \gtrsim \frac{\hbar}{2}$ y como $v = \frac{nh}{2mL}$, tenemos que $mL \times \frac{nh}{2mL} \gtrsim \frac{\hbar}{2} \;\Rightarrow\; n \gtrsim \frac{1}{2\pi} \;\Rightarrow\; n \geqslant 1$

c) **Sabiendo que un electrón en un átomo tiene típicamente energías entre 10-100 eV, ¿será posible encontrarlo dentro del núcleo?**

La energía mínima de esta configuración es en $n = 1$, luego si consideramos que nuestra caja hipotética es el núcleo del átomo y queremos que la partícula encerrada sea un electrón, tendremos:

$$E_{\text{mín}} = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(4{,}136 \cdot 10^{15}\ \text{eV} \cdot \text{s})^2}{8 \cdot (511\ \text{KeV/c}^2) \cdot 10^{-28}\ \text{m}^2} = 3{,}7\ \text{GeV},$$

donde L es considerado el radio del núcleo y m es la masa del electrón. Luego, la energía mínima es muy alta como para que un electrón pueda estar dentro del núcleo.

Pregunta 3 La constante de Rydberg se obtiene a partir del modelo de Bohr como:

$$R_H = \frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2ch^3}, \qquad \textbf{donde Z es el número atómico}.$$

a) **¿Cuánto debería valer la razón R_{He^+}/R_H considerando que la masa m no es la masa reducida del átomo, sino la masa del electrón, que es igual para ambos átomos?**

Si consideramos que $m_e = m$ tendremos que

$$\frac{R_{He^+}}{R_H} = \left(\frac{Z_{He^+}}{Z_H}\right) = 2^2 = 4.$$

b) **Considere ahora la masa reducida $m = m_e M_{\text{núcleo}}/(m_e + M_{\text{núcleo}})$ y muestre que R_{He^+}/R_H=4.0015**

Primero calculamos la masa reducida:

$$m = \frac{m_e \cdot M_n}{m_e + M_n} = m_e\left(1 + \frac{m_e}{M_n}\right)^{-1} \approx m_e\left(1 - \frac{m_e}{M_n}\right)$$

donde M_n es la masa del núcleo en cuestión y m_e es la masa del electrón. Luego, tendremos que $M_{He^+} = 4 \cdot 2000m_e = 8000m_e$ y $M_H = 2000m_e$.

Luego, encontramos que

$$\frac{R_{He^+}}{R_H} = \frac{m_{e-He^+} \cdot Z_{He^+}^2}{m_{e-H} \cdot Z_H^2} = \frac{m_e\left(1 - \frac{m_e}{8000\ m_e}\right) \cdot 2^2}{m_e\left(1 - \frac{m_e}{2000\ m_e}\right) \cdot 1^2} = \frac{\frac{8000}{8001}m_e \cdot 4}{\frac{2000}{2001}m_e \cdot 1} = 4{,}0015$$

c) **Aplique lo mismo al Deuterio y calcule R_D/R_H.**

Ahora, hacemos lo mismo que arriba, pero resumido:

$$\frac{R_D}{R_H} = \frac{m_{e-D} \cdot Z_D^2}{m_{e-H} \cdot Z_H^2} = \frac{\frac{4000}{4001}m_e \cdot 4}{\frac{2000}{2001}m_e \cdot 1} = 1{,}00025$$

d) **¿Cuánto vale Ly$\alpha(D)$ si Ly$\alpha(H) = 1215{,}67$Å?**
Primero que nada, sabemos que

$$\frac{1}{\lambda_D} = R_D\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \quad \text{y} \quad \frac{1}{\lambda_H} = R_H\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

luego, usamos la razón calculada anteriormente para encontrar:

$$\frac{\lambda_H}{\lambda_D} = \frac{R_D}{R_H} \Rightarrow \lambda_D = \frac{R_H}{R_D}\lambda_H \Rightarrow \lambda_{\mathrm{Ly}\alpha(D)} = \frac{1}{1{,}00025}1215{,}67 = 1215{,}37 \text{ Å}$$

Pregunta 4 El principio de correspondencia indica que en el límite de números cuánticos grandes, las predicciones de mecánica cuántica deben parecerse a las de mecánica clásica.

a) **Demuestre que, clásicamente, la frecuencia de revolución de un electrón en una órbita circular alrededor del núcleo de hidrógeno es:**
$f = \frac{e}{2\pi\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r^3}}$.
Si hacemos igualdad de fuerzas, centrípeta y eléctrica, encontramos que:

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \Rightarrow \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{mr^3}}$$
$$\Rightarrow f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{e}{2\pi\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r^3}}$$

b) **La fórmula para la diferencia de energías entre dos niveles del átomo de Bohr fue calculada en clases, y se obtuvo:**
$\Delta E = \frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2h^2}(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2})$
Demuestre que la frecuencia para un salto de un nivel al siguiente, cuando n es grande, se puede aproximar como:
$\nu = \frac{me^4}{4\epsilon_0^2h^3n^3}$
Si el salto es de un nivel al siguiente, podemos esribir $n_1 = n$ y $n_2 = n + 1$, y si n es grande, podemos aproximar:

$$\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \approx \frac{2n}{n^4} \approx \frac{2}{n^3}$$

Luego, la diferencia de energías queda aproximada a:

$$\Delta E = \frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2h^2}\frac{2}{n^3}$$

pero $\Delta E = h\nu$, y el átomo de Bohr es el modelo del átomo de hidrógeno ($Z = 1$),

$$\nu = \frac{me^4}{4\epsilon_0^2h^3n^3}$$

c) **Según lo visto en clases, el radio de la órbita de un electrón en el n-ésimo nivel de energía es:**

$r_n = \frac{h^2 \epsilon_0 n^2}{\pi m e^2}$

Muestre que reemplazando en la fórmula obtenida en b)**, se reobtiene el resultado clásico para la frecuencia** f **de revolución.**

Despejamos n en la fórmula anterior y luego lo reemplazamos en la frecuencia ν calculada en la parte anterior:

$$n = \sqrt{\frac{\pi m e^2 r}{h^2 \epsilon_0}} \Rightarrow \nu = \frac{m e^4}{4 \epsilon_0^2 h^3} \times \frac{h^3 \epsilon_0^{3/2}}{\pi^{3/2} m^{3/2} e^3 r^{3/2}} = \frac{e}{2\pi \sqrt{4\pi \epsilon_0 m r^3}} = f \tag{1}$$