Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

FI34A-03 Guía 3

Profesor: **Sebastián López**
Auxiliares: Diego Muñoz
Sebastián Santana

1 de junio de 2005

1. Se pretende medir la distancia entre dos planos adeyacentes de un cristal. Si rayos X de longitud de onda 0.5Åson detectados en un ángulo de 5°, cual es el espaciado entre planos? ¿A qué ángulo ocurrrirá un segundo máximo?

2. Sabiendo que la forma más simple de onda monocromática es la sinusoidal:

$$f(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

Expresada comúnmente en notación compleja:

$$f(x,t) = Re[\tilde{f}(x,t)] \quad \text{con} \quad \tilde{f}(x,t) = \tilde{A}e^{i(kx-\omega t)}$$

Se le pide a Ud. hacer una superposición de estas ondas sinusoidales con una distribución en distintas longitudes de onda, para obtener una onda que, en general, no es sinusoidal:

$$\tilde{f}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k)e^{i(kx-\omega t)}dk$$

Esto quiere decir que cualquier onda puede ser representada como superposición de ondas sinusoidales.[Descomposición de Fourier].

Las funciones complejas $\tilde{f}(x,t)$ y $\tilde{A}(k)$ viven en espacio de coordenadas y en espacio de números de onda respectivamente, y están relacionados entre sí por una transformada de Fourier. $\tilde{A}(k)$ actúa como una función de peso y define el llamado **paquete de onda** .

Considere un paquete de onda unidimensionales con distribución espectral $f(k)$:

$$i)\ \ f(k) = exp[-\frac{1}{2}\alpha^2 k^2], \qquad ii)\ \ f(k) = exp[-\beta|k|]$$

Obtenga:

a) El paquete de ondas en espacio real a $t = 0$ mediante transformada de Fourier

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{ikx}dk$$

b) Encuentre la desviación estándar Δx y Δk así como el producto $\Delta x \Delta k$, recordando que:

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \;\text{ y }\; \langle x \rangle = \int x g(x) dx / \int g(x) dx$$

$\Delta x \Delta k$ debe ser del orden de la unidad. ¿Qué sucede si consideramos la hipótesis de *De Broglie* $p = \hbar k$?

3. Un experimento de Stern-Gerlach se realiza con átomos de plata (Ag) **neutros** que se obtienen al ser vaporizados desde una superficie de plata calentada en un horno a 1200°C. Éstos son dirigidos ahacia una pantalla mediante un colimador. Si el haz de partículas viaja 1 metro, use el principio de incertidumbre para encontrar un orden de magnitud para la marca más pequeña que pueden dejar las partículas en el detector.

   Si se ponen dos polos de un magneto, de modo que exista un campo magnético constante no uniforme a través del cual, de forma perpendicular, pase el haz de partículas, ¿Es posible que se altere la medición estimada?

   Hint: $m_{Ag} = 1{,}8 \times 10{-}22$g , $k_B = 1{,}38 \times 10^{-16}$erg K^{-1}

4. La generalización a la cuantización de la energía en el atómo de hidrógeno hecha por Niels Bohr corresponde a la llamada **cuantizacioń de Bohr-Sommerfeld** . Consiste en realizar un análisis clásico del movimiento (determinista, no probabilista) y luego exigir que no haya interferencias destructivas de las ondas de materia, i.e. ,hay un número entero de longitudes de onda de *De Broglie* alrededor de la órbita cerrada o a lo largo de un período del movimiento clásico. Matemáticamente, si q es la coordenada generalizada de la partícula y p es su momentum, entonces:

$$n = \oint \frac{dq}{\lambda} = \oint \frac{dq}{h/p} = \frac{1}{h} \oint p\, dq$$

   o bien

$$nh = \oint p\, dq, \quad \text{para } n = 1, 2, ...$$

   a) Para el átomo hidrogenoide con órbitas circulares, deduzca la cuantización del momentum angular

   b) Para un oscilador armónico, demuestre que la energía en coordenadas canónicas (x, p) se escribe:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

   Luego, desmuestre que la cuantización de Sommerfeld sobre una trayectoria cerrada resulta en:

$$nh = m x_0^2 \omega \pi$$

   Encuentre a partir de esta regla los estados cuantizados de energía del oscilador armónico.

   c) Utilice el principio de incertidumbre de Heisenberg para estimar la energía del nivel fundamental del oscilador armónico. Este nivel define un *piso* mínimo de energía. Esta corrección debe ser agregada al espectro de energías estimado en la parte *b)* para finalmente debe obtener:

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

5. Estime el radio de Bohr del atómo de hidrógeno como el radio que minimiza la energía. Use el principio de incertidumbre.

   El radio de Bohr a_0 está dado por $\hbar^2/m_e e^2 = 5{,}2918 \times 10^{-9}$ cm en el sistema CGS y por $4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2 = 5{,}2918 \times 10^{-11}$ m en MKS.

6. Utilice los postulados de Bohr