Pauta Control Nº1

Problema Nº1

Se proponen transformaciones del tipo:

$$x = ax' + b(ct'), \qquad (ct) = ex' + f(ct')$$

Dado que el movimiento se da sólo en el eje x, podemos suponer que la relación entre y, y', z, z' es trivial:

$$y = y', \qquad z = z' \qquad \text{(0.2 pto.)}$$

a) Debido a la isotropía y homogeneidad del espacio (En otra palabras, no importa dónde se ubiquen los orígenes ni cómo se orienten los ejes de los sistemas) se deduce que la relación entre las coordenadas de uno y otro sistema inercial debe ser lineal. Por lo tanto, las cantidades a, b, c, f son independientes de las mismas. Eso sí, lo lógico es que sí sean dependientes de la velocidad relativa entre los sistemas ($\vec{v}$). (0.8 pto.).

b) La idea acá es plantear una serie de movimientos de partículas cuyo movimiento conocemos para ambos sistemas de referencia inerciales. Los coeficientes a, b, e, f deben ser tales que permitan obtener las soluciones de dichos problemas.

i.- Sabemos que la velocidad de la luz es la misma para todos los sistemas de referencia. De ello podemos deducir la trayectoria del fotón en ambos sistemas inerciales:

$$x = ct \qquad x' = ct'$$

Sustituyendo en las transformaciones:

$$ct = (a + b)ct' \quad \wedge \quad ct = (e + f)ct' \qquad \text{para todo } t, t'.$$

Por la arbitrariedad de t y t' concluimos que: $a + b = e + f$.

ii.- En este caso, el fotón se mueve hacia el otro lado. Podemos suponer que esto es así en ambos sistemas de referencia:

$$x = -ct \qquad x' = -ct'$$

Sustituyendo en las transformaciones:

$$-ct = (-a + b)ct' \quad \wedge \quad ct = (-e + f)ct' \qquad \text{para todo } t, t'.$$

Por la arbitrariedad de t y t' concluimos que: $a - b = -e + f$.

iii.- el problema que tenemos acá consiste simplemente en describir la trayectoria del origen O' según ambos sistemas. Evidentemente:

$$x = vt \qquad\qquad x' = 0$$

Sustituyendo en las transformaciones:

$$vt = bct' \quad \wedge \quad ct = fct' \qquad\qquad \text{para todo } t, t'.$$

Por la arbitrariedad de t y t' concluimos que: $vf = cb$.

Las ecuaciones halladas en (i), (ii) y (iii) definen un sistema lineal (incompleto) para a, b, e, f (Recordar que v, c son datos):

$$a + b = e + f, \qquad a - b = -e + f, \qquad vf = cb \qquad \text{(1.5 pto.)}$$

Resolviendo el sistema:

$$\frac{b}{a} = \frac{v}{c} \qquad \frac{e}{a} = \frac{v}{c} \qquad \frac{f}{a} = 1 \qquad \text{(1.5 pto.)}$$

c) Para terminar, ocupamos la invariancia espaciotemporal: $(s)^2 = (s')^2$.

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = (ax' + bct')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (ex' + fct')^2$$

$$= (y')^2 + (z')^2 + a^2(x' + vt')^2 - a^2(\tfrac{v}{c}x' + ct')^2 = (y')^2 + (z')^2 + a^2(1 - (\tfrac{v}{c})^2)((x')^2 - (ct')^2)$$

Entonces,

$$(s')^2 = (s)^2 \iff (y')^2 + (z')^2 + (x')^2 - (ct')^2 = (y')^2 + (z')^2 + a^2(1 - (\tfrac{v}{c})^2)((x')^2 - (ct')^2)$$

$$\iff a^2(1 - (\tfrac{v}{c})^2) = 1 \iff a^2 = \frac{1}{1 - (\frac{v}{c})^2} \iff a = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \gamma \qquad \text{(2.0 ptos.)}$$

Suponemos que a es positivo y no negativo pues en el caso $v = 0$ se tiene $a = 1$.

Escribimos finalmente las *Transformaciones de Lorenz*:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad ct = \frac{\frac{v}{c}x' + ct'}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$