Pauta P3 C1 FI33A

Autor: Felipe A. L. Benavides.

Fecha: (Control 1 Otoño 2008), Lunes 21 de Abril.

a) Vemos que, dado que se pide el valor del campo en un punto con una densidad de carga no constante, no es posible utilizar Gauss *adivinando* la orientación del campo. Intuitivamente es posible asumir, (y luego incluso demostrar), que, en el centro del lago, el campo apunta paralelo a la recta según $\hat{k}$. Por supuesto, se necesita la magnitud, y para ello, resolviendo por definición, se tendrá: (asumiendo que el radio del lago es muy grande)

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'}{\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\|^3} dq \ \ (1.2\, ptos.)$$

$$\overrightarrow{r} = z\hat{k},\ \overrightarrow{r}' = \rho\hat{\rho} \ \ (0.8\, ptos.)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{E}(z\hat{k}) = -\frac{a^3\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{z\hat{k} - \rho\hat{\rho}}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \rho d\rho d\theta$$

Aquí notamos que la componente de la integral que va según $\hat{\rho}$, es nula. Matemáticamente, basta ver que al separar las integrales, en algún momento habrá que integrar el vector unitario, (que varía según θ), y dicha integral es ciertamente nula. En términos físicos, éstos significa que las componentes según $\hat{i}$ y según $\hat{j}$, se anulan exactamente, puesto que, como la densidad de carga depende sólo de ρ, (i.e., es simétrica según θ), las magnitudes que apunten hacia afuera de la línea se equiparan para un mismo radio y cualquier ángulos. Por tanto, se cancelan sus aportes dados los vectores unitarios opuestos que genera $\hat{\rho}$. El desarrollo entonces dejará:

$$\overrightarrow{E}(z\hat{k}) = -\frac{a^3\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{z\hat{k}}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \rho d\rho d\theta$$

Ésta es la expresión para el campo en la recta. La integral recién planteada tiene primitiva, pero es difícil de obtener. Evaluamos, como se pide, en z=a, para calcular lo pedido. Queda:

$$\overrightarrow{E}((z=a)\hat{k}) = -\frac{a^3\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{a\hat{k}}{(a^2+\rho^2)^3} \rho d\rho d\theta \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{E}((z=a)\hat{k}) = -\frac{a^4\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \left[\frac{1}{(a^2+\rho^2)^2}\right]_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\hat{k} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{E}((z=a)\hat{k}) = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\hat{k} \;\; (1.5\, ptos.)$$

Con lo que tenemos un valor para la magnitud del campo a distancia a del lago. Se nota aquí que el campo apunta según $-\hat{k}$, lo que tiene sentido para $z > a$, pues la densidad de carga es *negativa*.

b) Asumiendo $z >> a$, como la carga es finita, sabemos que el campo puede estimarse como: (arriba del lago el campo apunta hacia abajo, y debajo de la superficie, hacia arriba)

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \frac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Con Q_T carga total de la superficie del lago, (campo radial), y para el potencial se obtiene: (r por supuesto siempre > 0)

$$V(r) = \frac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 r} \;\; (1.0\, pto.)$$

Como Q_T es desconocida, debemos integrar la densidad de carga.

$$Q_T = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{-a^3\sigma_0}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\rho d\rho d\theta \Rightarrow$$

$$Q_T = -2\pi\sigma_0 a^2 \;\; (0.5\, ptos.)$$

El potencial antes planteado resulta: (reemplazando)

$$V(r) = -\frac{\sigma_0 a^2}{2\varepsilon_0 r}$$

Para estimar el valor de la diferencia de potencial que hay para los peces que habitan en éste lugar, calculamos los casos límites. Dada la expresión, se conoce que el resultado sólo dependerá de la distancia, según $\hat{r}$, que atraviese el cuerpo del pez. Así, (la orientación genera dos casos límites), la diferencia de potencial en el peor caso queda:

$$\triangle V_{max} = V(r_0+4) - V(r_0) \Rightarrow$$

$$\triangle V_{max} = \frac{2\sigma_0 a^2}{\varepsilon_0 r_0(r_0+4)} \;\; (0.5\, ptos.)$$

Por otro lado, en el mejor caso,

$$\triangle V_{min} = V(r_0 + 1) - V(r_0) \Rightarrow$$

$$\triangle V_{min} = \frac{\sigma_0 a^2}{2\varepsilon_0 r_0 (r_0 + 1)} \ (0.5 \, ptos.)$$

$$\therefore \frac{\sigma_0 a^2}{2\varepsilon_0 r_0 (r_0 + 1)} \lesssim \triangle V \lesssim \frac{2\sigma_0 a^2}{\varepsilon_0 r_0 (r_0 + 4)}$$

Ambos casos se calcularon: con el cilindro orientado tal que la normal de la superficie plana es perpendicular a $\hat{r}$, (1º caso), y paralela (2º caso). Se supone aquí que el campo que atraviesa el cuerpo del animal es paralelo al manto o a las caras del cilindro, sin considerar las posibles orientaciones adicionales. Asumiendo que, dado que se está muy lejos de la carga, y que ésta distancia no es comparable con las dimensiones del cuerpo, se puede aproximar que las líneas de campo atraviesan paralelas el volúmen, (para cualquier orientación), tendremos eso sí, que existen ciertos ángulos en los que la diferencia de potencial entre dos puntos del pez pueden ser mayores a lo calculado. Por supuesto, en aquellos casos la diferencia de potencial varía según los extremos del cuerpo en consideración. Todo éste análisis puede llevar a calcular, por ejemplo, el valor promedio del potencial, (integrándolo para los extremos según se requiera, y luego dividiendo por el intervalo de puntos), pero dada la precisión de la pregunta, el rango anterior es suficiente. (Ver figura 1)

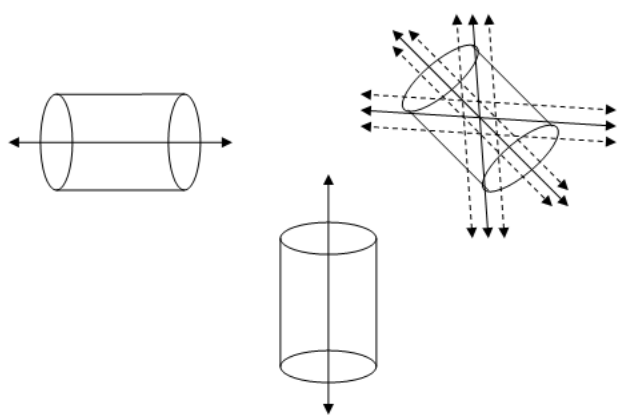

Figura 1.