# Pauta Ejercicio N°1 FI33A

Prof. Auxiliar: F. L. Benavides

Fecha: Miércoles 9 de Abril de 2008

El problema se puede resolver de dos formas. Una consta de asumir que se cumple la aproximación del potencial dipolar $V_{dipolar}(\overrightarrow{r})$, y despejar todo lo pedido desde allí. En algún momento se hará necesario asumir conocidas las cargas $Q$ y $-Q$ del dipolo modelado, y para despejarlas se utiliza la condición inicial para el campo dada la fuerza medida. (Ésto último puede tener dos precisiones).

Un segundo camino requiere calcular los potenciales generados por $Q$ y $-Q$ sobre la partícula $q$, sumarlos, (por principio de superposición, tal y como en los campos se realiza), para luego derivar en (a) y plantear la diferencia en (b). Esto último es un poco más largo que lo primero, y por ello queda orientado solamente. (Plantear los campos, superposición, e integrar, también es posible, pero sólo alarga el camino)

Según la forma 1

a)

$$\overrightarrow{F}(z) = q\overrightarrow{E}(z) \Rightarrow$$

$$\therefore \overrightarrow{E}(0) = \frac{\overrightarrow{F}(0)}{q}$$

En la expresión anterior se asume tácitamente que el campo es positivo en la posición en la que se encuentra $q$. Si ésto no fuese correcto, las ecuaciones mostrarían el problema después, luego no hay problema en asumirlo por ahora, de ésta forma. En cualquier caso, si el dipolo se modela como en la figura, la carga negativa está más cerca de la partícula que la positiva, lo que intuitivamente corrobora lo recién expuesto. Para el potencial, (con $\overrightarrow{r}$ posición a medir y $\overrightarrow{r}'$posición del centro del dipolo)

$$V_{dipolar}(\overrightarrow{r}) = \frac{\overrightarrow{p} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')}{4\pi\varepsilon_0 \parallel (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}') \parallel^3}$$

Como $\overrightarrow{p} = \sum r_k Q_k = \left(-Q(h - \frac{d}{2}) + Q(h - \frac{d}{2})\right) \cdot \hat{k} = Qd\hat{k} \Rightarrow$

$$V_{dipolar}(z\hat{k}) = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(z-h)^2} \frac{z-h}{\parallel z-h \parallel}$$

Dado que Q es desconocida, usando $z < h$, y $\overrightarrow{E} = -\nabla V$,

$$\overrightarrow{E} = -\frac{Qd}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(z-h)^3}\hat{k} \Rightarrow$$

Evaluando en z=0,

$$\frac{F}{q} = \frac{Qd}{2\pi\varepsilon_0 h^3} \Rightarrow Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 h^3 F}{qd}$$

Encontramos con ésto que para $z < h - \frac{d}{2}$, i.e., debajo del dipolo,

$$\therefore V_{dipolar}(z\hat{k}) = -\frac{Fh^3}{2q}\frac{1}{(z-h)^2}$$

Alternativamente, y con mayor precisión, se puede utilizar la expresión para las fuerzas de coulomb al despejar la constante, manteniendo la aproximación para el potencial. Obtendremos que: (siempre en $z < h - \frac{d}{2}$)

$$\overrightarrow{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(h-\frac{d}{2}\right)^2}\hat{k} - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(h+\frac{d}{2}\right)^2}\hat{k} \Rightarrow$$

Despejando y tomando módulo, (pues no importa para ésto la parte vectorial, que sólo dice que F es positiva según $\hat{k}$, i.e., la idea intuitiva inicial), tendremos que,

$$Q = \frac{\pi\varepsilon_0 \left(2h+d\right)^2 \left(2h-d\right)^2 F}{8hdq}$$

$$\therefore V_{dipolar}(z\hat{k}) = -\frac{F}{32hq}\frac{(2h+d)^2(2h-d)^2}{(z-h)^2}$$

Aquí notamos que si aproximamos el resultado con $h >> d$, que es, en el fondo, lo que ya asume el cálculo en el potencial dipolar, se llega al mismo resultado anterior para $Q$, y con ello el mismo $V$ calculado al ppio. Es decir, la constante se puede despejar con dos precisiones. Una, consecuentemente con la aproximación para el campo y potencial, y otra, ajustando mejor la constante, para que la aproximación resulte más válida. Ambos desarrollos son correctos, pues, a fin de cuentas, sólo se trata de una constante, y tanto la aproximación como el cálculo preciso manejan el mismo orden de magnitud.

b) El trabajo por unidad de carga es el potencial, luego, para llevar la carga $q$ a la altura $\frac{h}{2}$,tendremos que

$$\triangle V_{dipolar} = V_{dipolar}(\frac{h}{2}) - V_{dipolar}(0)$$

$$\triangle V_{dipolar} = -\frac{3Fh}{2q}$$

$$\therefore W = q\triangle V = -\frac{3}{2}Fh$$

Con el cálculo de mejor precisión,

$$\triangle V_{dipolar} = -\frac{3F}{32h^3q}(2h+d)^2(2h-d)^2$$

$$\therefore W = -\frac{3F}{32h^3}(2h+d)^2(2h-d)^2$$

La segunda forma para resolver éste ejercicio plantearía lo siguiente:

$$V(\overrightarrow{r} = z\hat{k}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\parallel z\hat{k} - (h+\frac{d}{2})\hat{k} \parallel} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\parallel z\hat{k} - (h-\frac{d}{2})\hat{k} \parallel}$$

Para despejar la constante $Q$, se pueden usar los dos caminos antes utilizados.