Pauta P3 C3 FI33A

Prof. Aux.: Felipe L. Benavides

Fecha: Lunes 23 de Junio

i. Para calcular los valores de las corrientes en ambos circuitos en régimen permanente, debemos resolver las ecuaciones de interacción del sistema y de ellas imponer que el tiempo sea muy grande. La idea es usar las leyes de kirchoff en ambos circuitos considerando el efecto de inductancia mutua que se produce, y la autoinductancia. (La inductancia mutua estará dada por la corriente del circuito opuesto, y la autoinductancia, por la propia. Por ello se plantea el campo magnético con ambas corrientes). Para plantear dichas leyes, debemos inicialmente obtener el valor del campo magnético dentro del toroide. Por ley de Ampére, debemos calcular el valor del campo generado por cada corriente, aproximándolo en todo el toroide por el que hay en el pto. medio de él.

$$\oint \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dl} = I_{Libre}$$

$$\int_0^{2\pi} -H(\rho)\rho d\theta = N_1 I_1(t) - N_2 I_2(t) \quad \left(\rho = \frac{a+b}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{H} = \frac{(N_2 I_2 - N_1 I_1)}{\pi(a+b)}\hat{\theta}$$

El signo menos en Ampére aparece pues el sistema de referencia es cilíndricas, con $\hat{k}$ saliendo de la figura en la hoja. Ésto es arbitrario, y perfectamente puede suponerse lo contrario y obtener resultados equivalentes. Por otro lado, las direcciones de las corrientes en cada bobinado *también* son arbitrarias, por lo que puede suponerse cualquier cosa, y, de ser coherente, se llegará a resultados correctos. Usando las direcciones de la figura del enunciado, y con la corriente en el segundo circuito bajando por el bobinado, la regla de la mano derecha en cada circuito dice que el flujo de campo generado por el primer circuito apuntará en $-\hat{\theta}$, y el segundo, $\hat{\theta}$. Planteando las leyes de kirchoff en ambos circuitos, (no asumimos nada respecto de ellas),

$$V(t) = V_0 cos(wt) + \varepsilon_{Inducida_1} = R_1 I_1$$

$$\varepsilon_{Inducida_2} = R_2 I_2$$

Las f.e.m. inducidas no son iguales, puesto que el número de vueltas en cada caso no es el mismo. De hecho, *ni siquiera tienen el mismo signo!* El cálculo de los flujos en cada circuito, (inducidos respecto de su opuesto y sí mismos), es donde debemos tener más cuidado. Para el primer circuito, la normal apuntará según $-\hat{\theta}$ en nuestro sistema de referencia. (La regla de la mano derecha para la corriente arbitraria arroja éste resultado). Para el segundo circuito, es al revés, y la normal apunta según $\hat{\theta}$. Usamos las direcciones arbitrarias pues el signo menos de la inducción ajusta después los resultados, para los corrientes *que se oponen.* Los flujos finalmente son,

$$\phi_1 = N_1 \int \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS}_1 = -N_1 \mu \frac{(N_2 I_2 - N_1 I_1)}{\pi(a+b)} S$$

$$\phi_2 = N_2 \int \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS}_2 = N_2 \mu \frac{(N_2 I_2 - N_1 I_1)}{\pi(a+b)} S$$

donde $S = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \pi$

La inducción queda,

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\varepsilon_{Inducida_1} = N_1\mu\frac{N_2\dot{I}_2 - N_1\dot{I}_1}{\pi(a+b)}S$$

$$\varepsilon_{Inducida_2} = -N_2\mu\frac{N_2\dot{I}_2 - N_1\dot{I}_1}{\pi(a+b)}S$$

Podemos comprobar que hemos sido coherentes, puesto que de las expresiones anteriores pueden perfectamente extraerse los términos de inductancia mutua y autoinductancia. En cada caso, las inductancias mutuas se suman, y las propias, se oponen al fenómeno total de tensión en el circuito. (En varios textos se encuentran éstas mismas ecuaciones, pero con el signo cambiado. Ésto se debe a que se asume el signo opuesto dentro de los $\varepsilon_{Inducccion}$).

Finalmente, las leyes de kirchoff quedan,

$$V_0cos(wt) + C_1\left(N_2\dot{I}_2 - N_1\dot{I}_1\right) = R_1I_1$$

$$-C_2\left(N_2\dot{I}_2 - N_1\dot{I}_1\right) = R_2I_2$$

usando que $C_1 = \frac{N_1\mu S}{\pi(a+b)}$, $C_2 = \frac{N_2\mu S}{\pi(a+b)}$

La física del problema termina aquí. Una forma de resolver éste sistema es despejar la diferencia de las derivadas de las corrientes en la segunda ecuación, introducir ésto en la primera, y derivar dicha ecuación resultante. Ésto entrega la siguiente EDO,

$$\dot{I}_2 + \frac{R_1R_2}{C_2R_1N_2 + C_1R_2N_1}I_2 = -\frac{C_2wV_0N_1}{C_1R_2N_1 + C_2R_1N_2}sen(wt)$$

$$\therefore I_2(t) = Ae^{-\lambda t} + Bcos(wt+\phi)$$

Las constantes B y ϕ, se despejan de imponer que la solución es ésta, introducirla en la EDO y luego abrir los cos(a+b) y sen(a+b) con la fórmula de la suma de ángulos. De ahí, se tendrá que $K_1sen(wt) + K_2cos(wt) = 0$ con los K constantes conocidas. Como las funciones sen y cos son ortogonales, las constantes deben ser nulas, para que la ecuación se cumpla. Ésto despeja ϕ y B. La constante A se despeja de la condición inicial, que es que la corriente al inicio en el circuito 2 es nula, y λ es conocida, de la EDO resolviendo la parte homogénea. $\left(\lambda = \frac{R_1R_2}{C_2R_1N_2+C_1R_2N_1}\right)$.
La corriente $I_1(t)$ puede despejarse sin necesidad de construir una EDO para ella. Del sistema, se tiene que,

$$R_1I_1 + \frac{C_1R_2I_2}{C_2} = V_0cos(wt)$$

$$\therefore I_1(t) = \frac{V_0}{R_1}cos(wt) - \frac{C_1R_2}{C_2R_1}\left[Ae^{-\lambda t} + Bcos(wt+\phi)\right]$$

Al imponer que haya pasado mucho tiempo, las exponenciales caerán, y si la fuente se mantiene, las corrientes en régimen permanente serán sumas de sinusoidales según las ecuaciones para I_1 e I_2.

ii. La situación queda definida por las siguientes ecuaciones,

$$+C_1 \left(N_2 \dot{I}_2 - N_1 \dot{I}_1 \right) = R_1 I_1$$

$$-C_2 \left(N_2 \dot{I}_2 - N_1 \dot{I}_1 \right) = R_2 I_2$$

De ahí,

$$I_1 = -I_2 \left(\frac{C_1 R_2}{C_2 R_1} \right)$$

$$\Rightarrow \dot{I}_2 + \frac{R_1 R_2}{C_2 N_2 R_1 + C_1 N_1 R_2} I_2 = 0 \Rightarrow I_2(t) = De^{-\lambda_2 t}$$

Con $\lambda_2 = \frac{R_1 R_2}{C_2 N_2 R_1 + C_1 N_1 R_2}$. Se ve que la corriente en ambos circuitos se disipará rápidamente en el tiempo. Las condiciones iniciales determinan el problema. La corriente máxima en I_1 sale de, despreciando la exponencial, derivar e igualar a cero en la expresión original, considerando la fuente. La condición inicial determina la constante D, y de ahí el álgebra de las expresiones resuelve el problema en su totalidad.