Pauta P1 C3 FI33A

Prof. Aux.: Felipe L. Benavides

Fecha: Lunes 23 de Junio

a)

i. Para calcular el campo en ésta sección, basta plantear las expresiones por definición. Tendremos,

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\overrightarrow{dr}' \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')}{\| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}' \|^3}$$

Si,

$$\overrightarrow{r} = d\hat{k},\ \overrightarrow{r}' = a\hat{\rho}\ y\ \overrightarrow{dr}' = ad\theta\hat{\theta},$$

Entonces,

$$\overrightarrow{B}(d\hat{k}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ad\theta\hat{\theta} \times \left(d\hat{k} - a\hat{\rho}\right)}{(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} dd\theta\hat{\rho} + a\hat{k}$$

$$\overrightarrow{B}(d\hat{k}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi\hat{k} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\,(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

ii. Usando la suposición por enunciado, planteamos,

$$M = \frac{\phi_{21}}{I_1}$$

que utiliza el flujo producido por el campo generado por el anillo más grande, sobre el más pequeño, dividido por la corriente del primero. Así,

$$M = \frac{\mu_0 I a^2}{2\,(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\pi b^2}{I} = \frac{\mu_0 a^2 b^2 \pi}{2\,(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

b)

i. Para estimar la precesión del electrón, puede usarse la ecuación de torques. Hay múltiples formas de resolver éste problema, pues el fenómeno de precesión es conocido e importante en la teoría de paramagnetismo. En efecto, la interacción se llama *precesión de larmor,* y ha sido resuelta con un sinnúmero de procedimientos. En éste caso, se planteará el momentum angular, y con su derivada se trabajará con la ecuación de torques, usando la aproximación de dipolo magnético. Para entender el movimiento, puede hacerse una analogía, (como en varios textos se realiza), con el movimiento de un trompo giratorio, con precesión en el campo gravitacional de la tierra. El torque o momento de torsión gravitacional que actúa para volcarlo resulta *más bien* en un movimiento de precesión, dado el momento angular que posee. (El momento angular rota!).

ii. Despejando el momentum angular, para usar la indicación,

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} = m\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} = mRv\hat{n}$$

donde *m, R y v,* son la masa del electrón, el radio de la órbita, (en éste caso corresponde al radio de Bohr), y la velocidad del electrón, respectivamente. Necesitamos la velocidad del núcleo. Para ello, usamos coordenadas cilíndricas solidarias al movimiento del electrón, casi como si se representase un sólido rígido. Así, de la ecuación de newton y dichas coordenadas,

$$-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + -eR\dot{\theta}B_0 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3 m} + \frac{e\dot{\theta}B_0}{m}$$

Aquí, es importante detenerse. Los órdenes de magnitud son importantes, y deben tenerse en cuenta para la aproximación. En rigor, la existencia del campo magnético *altera* la velocidad del electrón según el ángulo θ, tal y como lo predice la ecuación anterior, pero la alteración es mínima. En general, la velocidad angular según θ es grande para el electrón, y el término que aporta la fuerza eléctrica por la atracción al núcleo es importante, no así el de la fuerza magnética. En términos aproximados, el término de la fuerza eléctrica ponderado en la parte derecha de la expresión vale $2 \cdot 10^{33}$, mientras que, el de la izquierda, $1.75 \cdot \dot{\theta}B_0 10^{11}$. Sin lugar a dudas, dado que los campos magnéticos no son de inmensas proporciones, y la velocidad angular tiene límites, se nota como el segundo término es despreciable respecto del primero.

Calculando, (con la aproximación anterior),

$$R\dot{\theta} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mR}},$$

$$\overrightarrow{L} = e\sqrt{\frac{mR}{4\pi\varepsilon_0}}\hat{n},$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{m} = -\frac{\mu_0 e^2}{2}\sqrt{\frac{R}{4\pi\varepsilon_0 m}}\hat{n}$$

Como el momento dipolar magnético ya considera la permeabilidad magnética del lugar donde se sitúan los fenómenos, (según la expresión indicada en el enunciado, y usando que $\overrightarrow{B_0} = \mu_0\overrightarrow{H_0}$),

$$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{m} \times \overrightarrow{H} = -\frac{\mu_0 e^2}{2}\sqrt{\frac{R}{4\pi\varepsilon_0 m}}\hat{n} \times H_0\hat{k}$$

Como $\hat{n} = sen\alpha cos\phi\hat{i} + sen\alpha sen\phi\hat{j} + cos\alpha\hat{k}$, (usando ésta vez coordenadas esféricas),

$$\overrightarrow{T} = \frac{e^2 B_0}{2}\sqrt{\frac{R}{4\pi\varepsilon_0 m}}\left(-sen\alpha sen\phi\hat{i} + sen\alpha cos\phi\hat{j}\right)$$

Por otro lado,

$$\overrightarrow{T} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{L}\right) = e\sqrt{\frac{mR}{4\pi\varepsilon_0}}\left(-sen\alpha sen\phi\dot{\phi}\hat{i} + sen\alpha cos\phi\dot{\phi}\hat{j}\right)$$

Igualando, nos damos cuenta que las ecuaciones despejan $\dot{\phi}$, y advierten que la dirección es correcta respecto de lo que se supuso en el dibujo. Finalmente, la velocidad angular de precesión, queda,

$$\dot{\phi} = \frac{eB_0}{2m}$$