Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FI33A ELECTROMAGNETISMO
Clase 24
Campos Variables en el Tiempo-IV

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

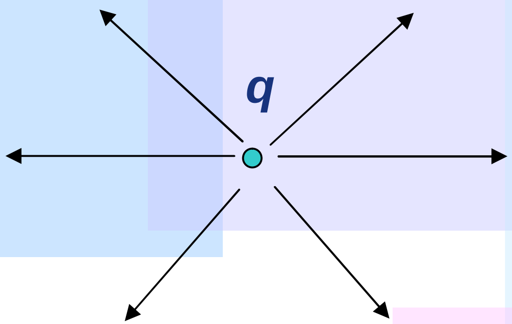
- Ondas Electromagnéticas
- Transformaciones de Lorentz

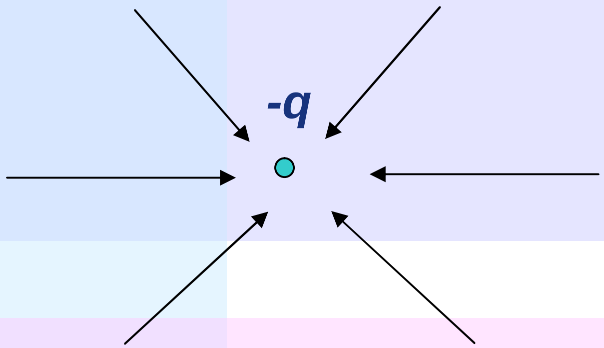
ONDAS ELECTROMAGNETICAS

Primera ecuación de Maxwell

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Las líneas de campos eléctricos se generan en cargas eléctricas (nacen y mueren en)





$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r}) \qquad \nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

Segunda ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

No hay cargas magnéticas (hasta ahora)

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}) = 0$$

Ecuación de continuidad

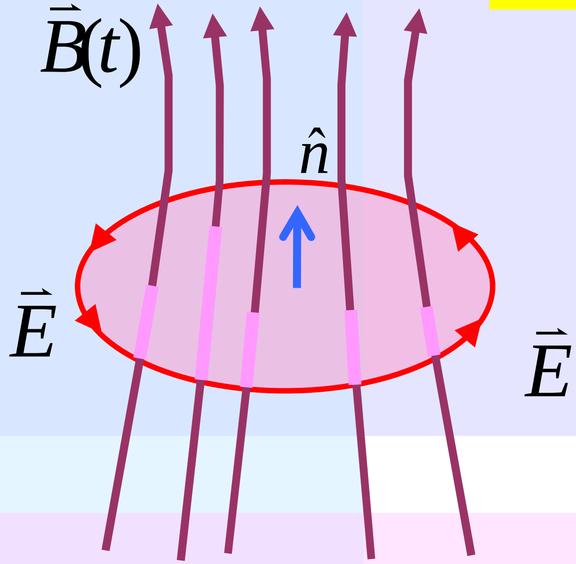
$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

Ley Circuital de Ampere

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

Tercera ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$ **Fuerza de Lorentz**

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

4 ta ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Consideremos las ecuaciones de Maxwell en el espacio vacío

Se cumple

$$\rho = 0 \qquad \vec{J} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Tomando el rotor

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\mu_0 \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{H}}{dt}\right)$$

identidad $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} \qquad \therefore \nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\nabla^2 \vec{E}$$

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\nabla^2\vec{E}$$

$$\nabla\bullet\vec{E}=0 \qquad \nabla\times\vec{E}=-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{H}=0 \qquad \nabla\times\vec{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Además

$$\nabla\times\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{H}\right)$$

$$\Rightarrow\nabla\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

luego

$$-\nabla^2\vec{E}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Es decir

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}-\gamma^2\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0}$$

con $\gamma^{-2}=\mu_0\varepsilon_0=c^2$

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Similarmente se obtiene

$$\nabla^2 \vec{H} - \gamma^2 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

con $\gamma^{-2} = \mu_0 \varepsilon_0 = c^2$

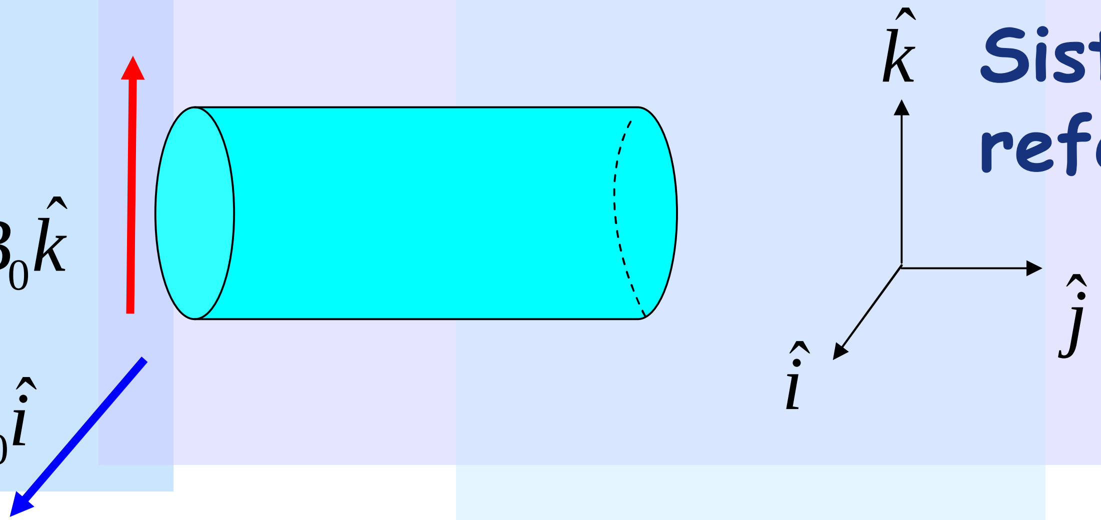
Luego los campos son ondas viajeras que se desplazan a la velocidad de la luz!!!

El problema de los sistemas de referencia

Cilindro conductor

$$\vec{B} = B_0\hat{k}$$

$$\vec{u} = u_0\hat{i}$$



Sistema de referencia fijo

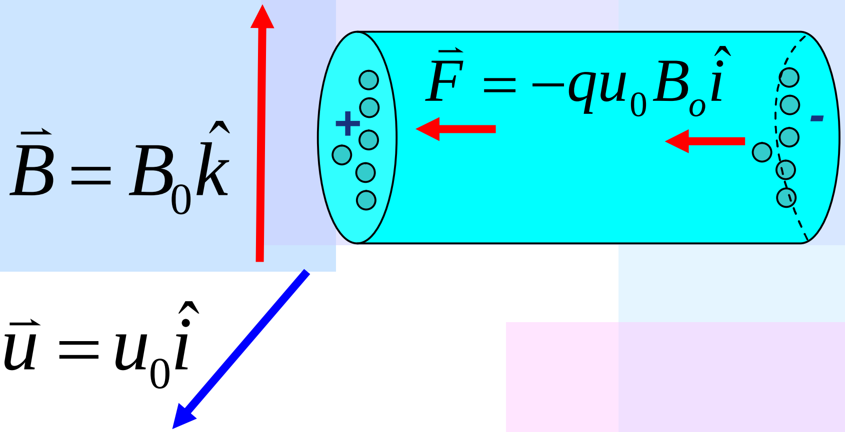
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}) = -qu_0B_o\hat{j}$$

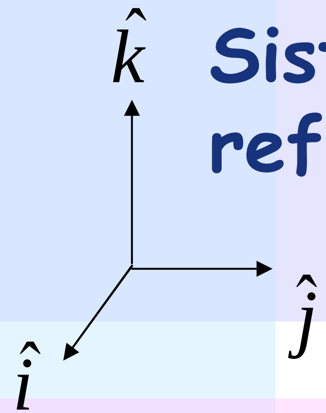
Fuera sobre las cargas del cilindro

El problema de los sistemas de referencia

Cilindro conductor

Fuerza sobre carga libre de conductor



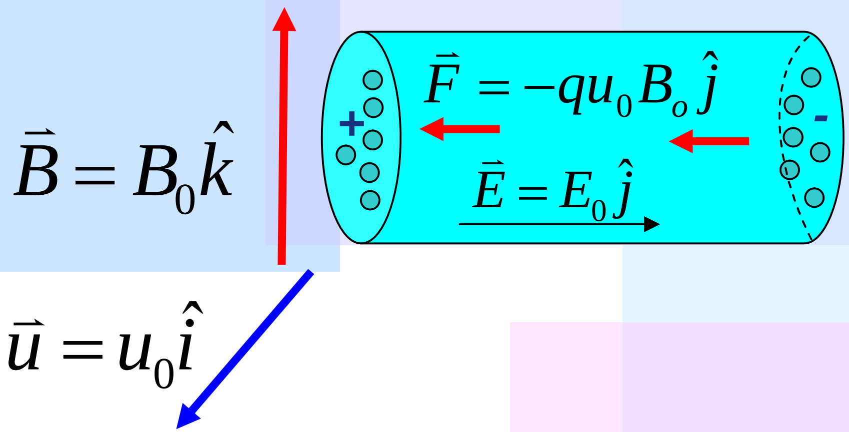


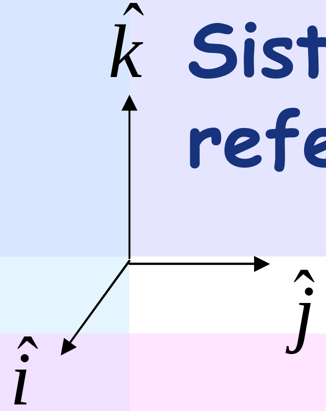
Sistema de referencia fijo

El problema de los sistemas de referencia

Cilindro conductor

Redistribución de cargas produce a su vez un campo eléctrico





Sistema de referencia fijo

El problema de los sistemas de referencia

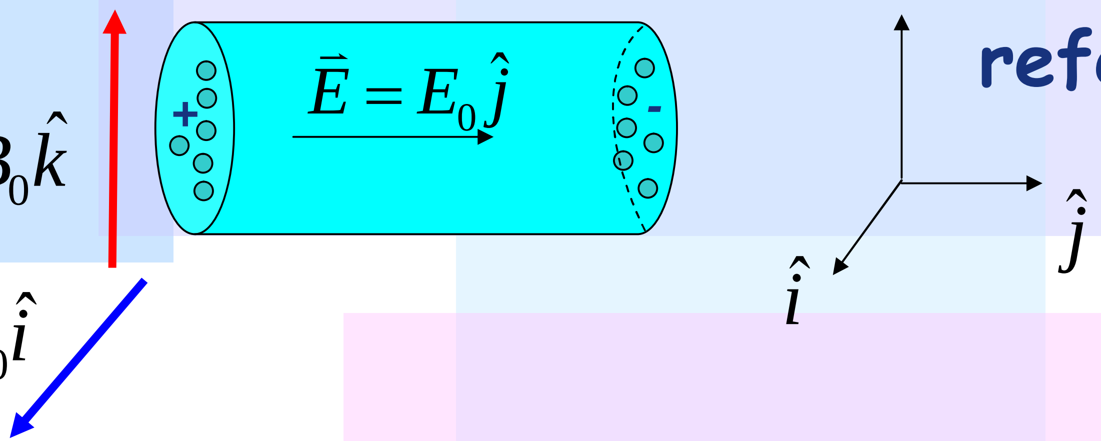
Fuerza neta sobre carga libre de conductor

$$\vec{F} = q\left(E - u_0 B_o\right)\hat{j}$$

$$\vec{B} = B_0\hat{k}$$

$$\vec{E} = E_0\hat{j}$$

$$\vec{u} = u_0\hat{i}$$



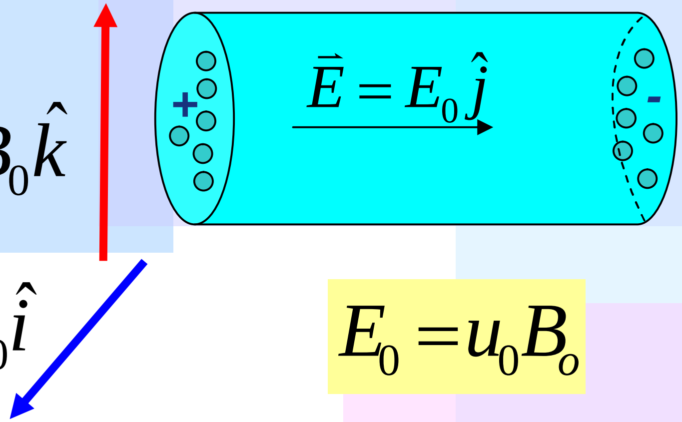
Sistema de referencia fijo

El problema de los sistemas de referencia

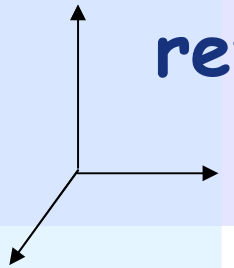
Situación de equilibrio: No hay fuerza sobre las cargas

$$F = 0 = q\left(E - u_0 B_o\right)\hat{j}$$

$$\vec{B} = B_0\hat{k}$$



$$\vec{u} = u_0\hat{i}$$



Sistema de referencia fijo

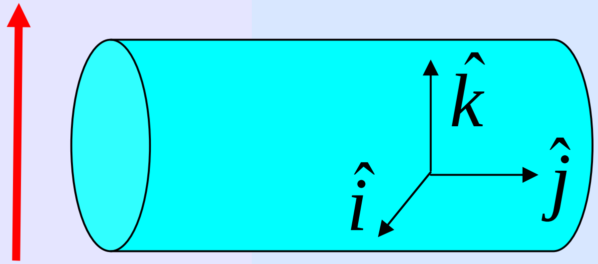
$$E_0 = u_0 B_o$$

Valor del campo eléctrico producido por la redistribución de cargas

El problema de los sistemas de referencia

Sistema de referencia solidario al cilindro

$\vec{B} = B_0 \hat{k}$

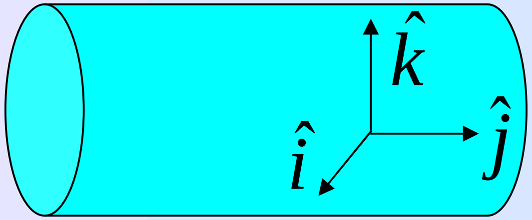


La velocidad del cilindro c/r sistema de referencia solidario es nula $\vec{u} = 0$

El problema de los sistemas de referencia

Sistema de referencia solidario al cilindro

$$\vec{B} = B_0 \hat{k}$$



$$\vec{u} = 0$$

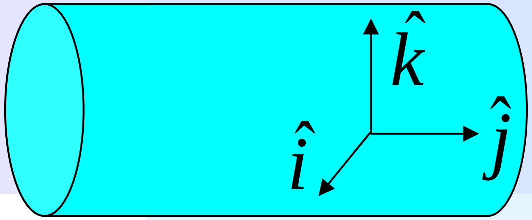
La fuerza neta es $\vec{F} = q(\vec{u} \times \vec{B}) = 0$!!!!

La física depende del sistema de referencia ?!

El problema de los sistemas de referencia

Para que la física sea la misma, desde el sistema de referencia solidario al cilindro debe aparecer un campo eléctrico EXTERNO

$$\vec{E}' = -E_0\,\hat{j}$$

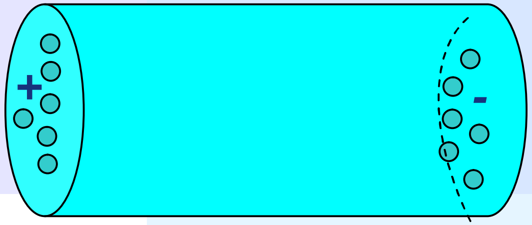


$$\vec{u} = 0$$

El problema de los sistemas de referencia

Para que la física sea la misma, desde el sistema de referencia solidario al cilindro debe aparecer un campo eléctrico EXTERNO

$$\vec{E}' = -E_0\,\hat{j}$$



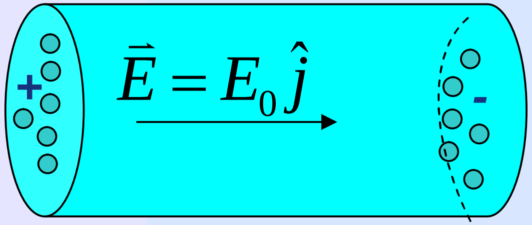
$$\vec{u} = 0$$

Campo produce una redistribución de cargas al interior del cilindro conductor

El problema de los sistemas de referencia

Redistribución de cargas produce a su vez un campo eléctrico

$$\vec{E}' = -E_0\,\hat{j}$$



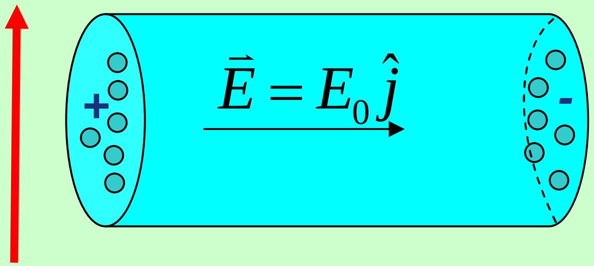
$$\vec{u} = 0$$

Con ello se logra el mismo estado de equilibro visto desde el sistema de referencia fijo

El problema de los sistemas de referencia

Sistema de referencia fijo

$$\vec{B} = B_0 \hat{k}$$



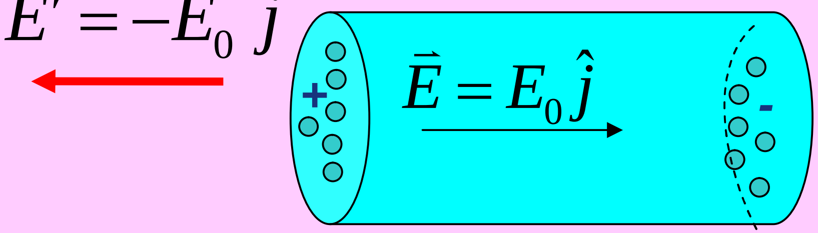
$$\vec{u} = u_0 \hat{i}$$

$$\vec{F} = 0 = q\left(E_0 - u_0 B_o\right)\hat{j}$$

$$E_0 = u_0 B_o$$

Sistema de referencia solidario al cilindro

$$\vec{E}' = -E_0\ \hat{j}$$



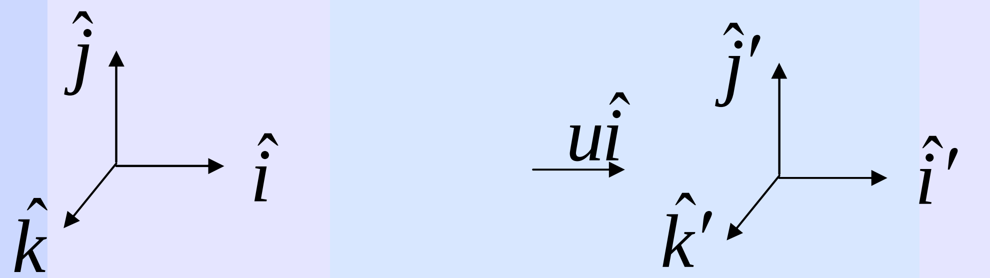
$$\vec{u} = 0 \qquad \vec{F} = 0 = q(\vec{E}' + \vec{E})$$

$$\vec{E}' = -\vec{E}$$

Luego lo que en un sistema es un campo magnético al cambiar de referencia pasa a campo eléctrico

Transformaciones de Lorentz

La ley de transformación de los campos eléctrico y magnético obedece a la transformación de Lorentz



$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$