Resolución Aux. N^o 13

Prof. Auxiliar: Felipe L. Benavides

Fecha: Miércoles 18 de Junio de 2008

Problema 1

a) Para obtener la carga en el condensador, en las distintas caras, usamos la conocida relación $C = \frac{Q}{V}$. Dado que C es dato, basta encontrar el potencial que enfrenta el condensador, y se tendrá lo pedido. Notamos que, dado que el campo magnético es variable en el tiempo, y el área del circuito que lo enfrenta también, existe inducción de una fem, pues el flujo que atraviesa el área que encierra el circuito es, en efecto, variable. Así, por inducción,

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

Por otro lado, el flujo por el circuito es:

$$\phi = \oint_{Circuito} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} = B_0 a_0 b sen(wt) cos(wt)$$

Como sabemos,

$$sen(2wt) = 2sen(wt)cos(wt)$$

Luego,

$$\phi(t) = \frac{B_0 a_0 b}{2} sen(2wt)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{B_0 a_0 b}{2} sen(2wt)\right) = -B_0 a_0 b w cos(2wt)$$

La fem que se indujo es negativa. (Siempre es así!). Ésto significa que la corriente que genera dicha fem *se opondrá* al campo magnético original, $\overrightarrow{B} = B_0 cos(wt)\hat{k}$. Por ésta razón, usando la misma figura, la corriente circuital será coherente con la regla de la mano derecha para el campo *contrario, no para el original.* De ahí, que la cara 1 reciba una carga *positiva*, pues el condensador enfrenta potencial positivo desde la cara 1 a la 2. Si rotamos la fuente, debemos mantener ésta convención, pues lo importante no es el dibujo, sino la dirección del flujo de corriente. Como entra por la cara 1, es positiva para ésta cara, y negativa para la 2. Finalmente, la carga inducida en la cara 1 es $C \cdot V$, y en la 2, $-C \cdot V$, donde V es la tensión inducida en módulo, y no hay ambiguedades, puesto que la dirección del campo magnético original está bien definida.

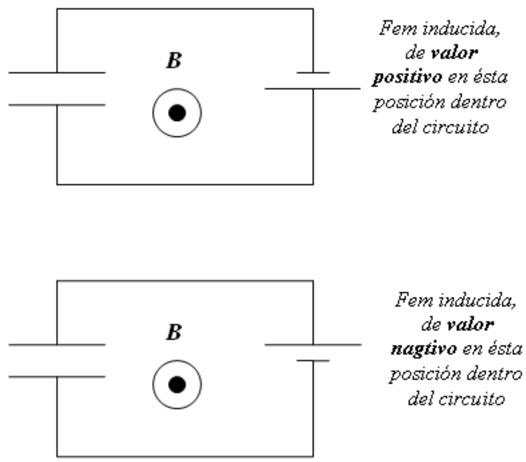

Figura Nº 1.

Calculando,

$$Q_1 = +CB_0 a_0 bw cos(2wt)$$

Para obtener la carga al instante inicial, basta evaluar en $t = 0$ la expresión anterior. Se observa que la frecuencia de la carga, y por ello, de la corriente circuital, es el doble de la variación del campo. Esto tiene sentido, pues la variación de flujo está directamente relacionada con tanto el cambio en el valor del campo magnético, como el cambio en el área circuital por la alteración de a, en $a(t)$.

b) Planteando la ley de voltajes de kirchoff, se obtiene, (según la figura 2),

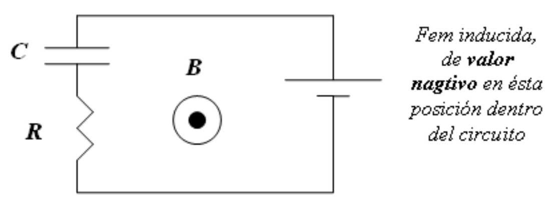

Figura Nº 2.

$$V(t) = Fem(t) = V_C + V_R = \frac{Q}{C} + RI$$

$$\Rightarrow Fem(t) = \frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt}$$

Aquí aparece una edo simple a resolver, pero larga. Se obtendrá finalmente que

$$Q(t) = Q(t)_{Homogenea} + Q(t)_{Particular}$$

Donde la parte homogénea viene dada por:

$$Q(t)_{Homogenea} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

Resolver queda propuesto. La condición inicial es la misma que se obtuvo en a), y la solución particular viene de proponer una solución de forma similar a la del lado derecho y calcular.

Problema 2

Para calcular la velocidad con la que cae la varilla, debemos primero hacer un análisis de fuerzas. Con él, y la ecuación de Newton, se resuelve todo el problema. La idea es que el campo magnético genera un flujo variable sobre el circuito, pues la varilla que lo cierra, se desplaza. La corriente por el circuito, y la interacción entre ella y el campo magnético original, generarán la fuerza que se opone a su caída. Planteando las fuerzas obtenemos:

$$\vec{F}_{Gravedad} = mg\hat{k}$$

$$\vec{F}_{Magnetica} = I\int_{Varilla} \vec{dl} \times \vec{B}$$

Usando el mismo análisis del problema anterior, la dirección del paso $\vec{dl}$ es según $\hat{i}$, pues la corriente avanza en ésta dirección, dado que el campo que genera, (por la regla de la mano derecha), se opone al original *sólo* en ésta disposición. De ésta forma, integrando sobre la varilla,

$$\vec{F}_{Magnetica} = I\int_{Varilla} dx\hat{i} \times (-B\hat{j}) = -IlB\hat{k}.$$

Luego,

$$\vec{F} = (mg - ILB)\hat{k}$$

La corriente eso sí, es desconocida. Por ello, usamos la ecuación que entrega el efecto de inducción,

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left((-B)z(t)l\right)$$

Como la vara tiene resistencia R,

$$\varepsilon = RI = Bl\frac{dz(t)}{dt} \Rightarrow I = \frac{BL}{R}\frac{d}{dt}\left(z(t)\right)$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2}{dt^2}\left(z(t)\right) = mg - \frac{l^2B^2}{R}\frac{d}{dt}\left(z(t)\right)$$

Finalmente, (resolviendo el polinomio característico, (y con él las partes homogénea y particular), sumando y derivando),

$$v(t) = \frac{d}{dt}\left(z(t)\right) = \frac{mgR}{(BL)^2} + Ae^{\frac{-(BL)^2}{mR}t}$$

La condición inicial es de reposo en $t = 0$, por lo que,

$$\frac{d}{dt}\left(z(t)\right) = v(t) = \frac{mgR}{(BL)^2}\left[1 - e^{-\frac{(BL)^2}{mR}t}\right]$$

Problema 3

a) Necesitamos una ecuación para $w(\theta)$, de tal forma que evaluando obtengamos la diferencia. Para encontrarla, usaremos torque, pues de hecho, tenemos el momento de inercia $I_n = \frac{5ma^2}{12}$. Como,

$$\sum \vec{T} = I_n\vec{\alpha}$$

Con α la aceleración angular, y usando la aproximación de dipolo magnético, tendremos,

$$\vec{m} \times \vec{B}_0 = \vec{T} = I_n\vec{\alpha}$$

Necesitamos entonces $\overrightarrow{m}$. Pero $\overrightarrow{m} = I\overrightarrow{S}$, donde I es la corriente que atraviesa la espira, y $\overrightarrow{S}$, el vector de *área orientada, i.e.,* el área orientada según la normal a la superficie. La corriente es desconocida, por lo que usamos inducción. Tendremos que,

$$\phi(\theta(t)) = \int B_0\hat{i} \cdot d\rho dz\hat{\theta} = -B_0 a^2 sen(\theta)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}(\theta(t)) = B_0 a^2 cos(\theta)\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B_0 a^2 cos(\theta)\dot{\theta}}{R}$$

Como $\overrightarrow{S} = a^2\hat{\theta}$

$$\Rightarrow I_n\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{m} \times \overrightarrow{B}_0 = \frac{B_0^2 a^4}{R} cos^2(\theta)\dot{\theta}(-\hat{k})$$

$$\Rightarrow I_n\ddot{\theta} = -\frac{B_0^2 a^4}{R}\left(\frac{1 + cos(2\theta)}{2}\right)\dot{\theta}$$

Resolviendo la ecuación anterior, y planteando la diferencia entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi$,

$$\triangle w = -\frac{B_0^2 a^4}{2RI_n}\pi = \frac{6\pi}{5}\frac{\left(B_0 a^2\right)}{mR}$$

b) Ésta parte puede resolverse de dos formas, en forma simple. La primera asume el cálculo de la potencia disipada en la resistencia por definición, usando adecuadamente las expresiones para la potencia en circuitos sencillos como éste. Otra forma, ciertamente más elegante, está relacionada con darse cuenta que la pérdida en energía cinética corresponde a la pérdida de energía del sistema de la espira en movimiento, y esa pérdida puede cuantificarse por el teorema de trabajo y energía como

$$\triangle U = \frac{1}{2}I_n w_i^2 - \frac{1}{2}I_n w_f^2$$

Es interesante notar que la disipación térmica de energía por efecto Joule, corresponde, en condiciones ideales, a la pérdida de velocidad angular de la espira. Planteando los valores obtenidos para las velocidades angulares, y el momento de inercia de la espira, se obtiene el valor pedido.

Problema 4

a) En general, la definición de la inductancia mutua plantea que:

$$M = \frac{\phi_{12}}{I_2} = \frac{\phi_{21}}{I_1}$$

donde ϕ_{12} es el flujo de campo producido por el circuito 2 sobre el 1, y ϕ_{21}, análogo pero inverso. Dado que la bobina 2 es más ancha y corta que la 1, realizar ley de ampere con la suposición que el campo sólo apunta en su eje de simetría supone despreciar efectos de borde que son, en principio, no pequeños. (Ni necesariamente despreciables). Por lo anterior, trabajaremos con el flujo producido por el solenoide 1, dentro de la 2, i.e., con el lado derecho de la expresión. Así,

$$M = \frac{N}{I_1}\int_{Bobina\ 2}\overrightarrow{B}_1 \cdot d\overrightarrow{S}_2 = \frac{N}{I_1}\mu_0 n I_1 \pi a^2 = Na^2 n\pi\mu_0$$

b) El coeficiente de acomplamiento es,

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

De la definición para cada autoinductancia,

$$L_1 = \frac{\phi_1}{I_1} = \frac{nDB_1\pi a^2}{I_1} = \mu_0 \pi a^2 n^2 D$$

$$L_2 = \frac{\mu_0 \left(\frac{N}{d}\right) I_2 \pi b^2 N}{I_2} = \frac{N^2 \pi b^2}{d}\mu_0$$

Finalmente, (después de un depeje algebraico),

$$k = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{d}{D}}$$

Vemos que, si $a = b$ y $d = D$, i.e., cuando ambas bobinas se convierten en una sola, se cumple que $k = 1$, i.e., el acomplamiento es completo, lo que es coherente con el sistema. Si bien se utilizó aquí la ley de Ampére para obtener el campo dado por cada bobina, debe recalcarse que ésto es una aproximación, en especial para el caso de la bobina 2, y por lo tanto el coeficiente de acomplamiento aquí obtenido es una aproximación solamente. Dependiendo de los tamaños y las proporciones del sistema su validez puede aumentar o disminuir.