FI33A ELECTROMAGNETISMO
Clase 22
Campos Variables en el Tiempo-II

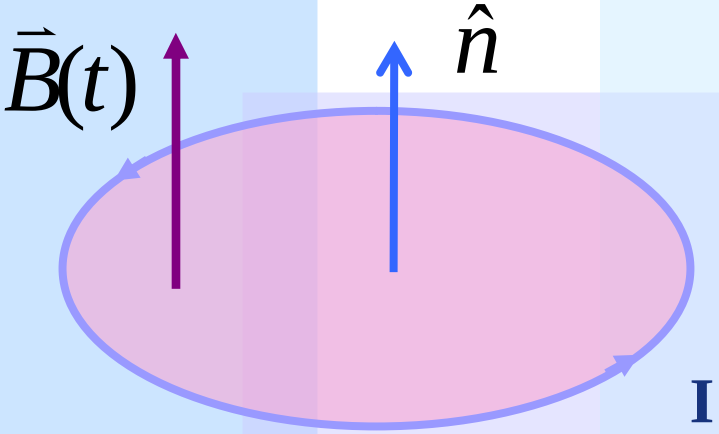
LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

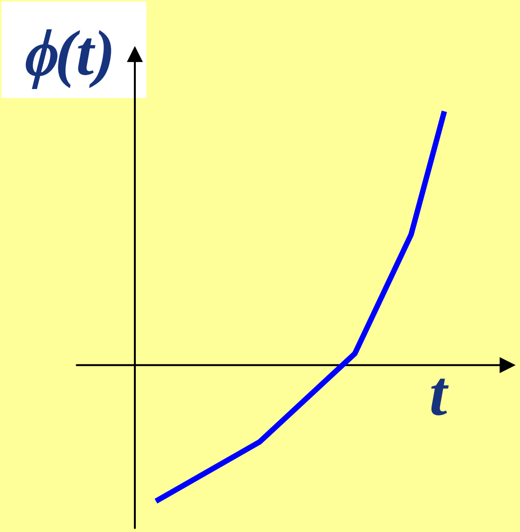
- Ley de Faraday-Lenz
- 3ª ecuación de Maxwell
- Inductancia propia
- Inductancia mutua
- Corriente de Desplazamiento

Ley de Faraday-Lenz

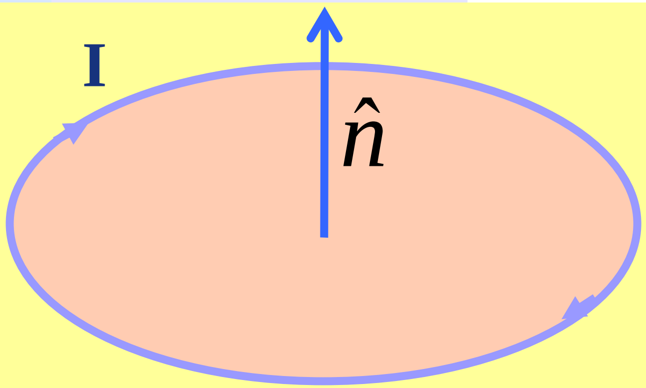
Un campo magnético variable genera o induce una FEM



$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$ **con** $$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



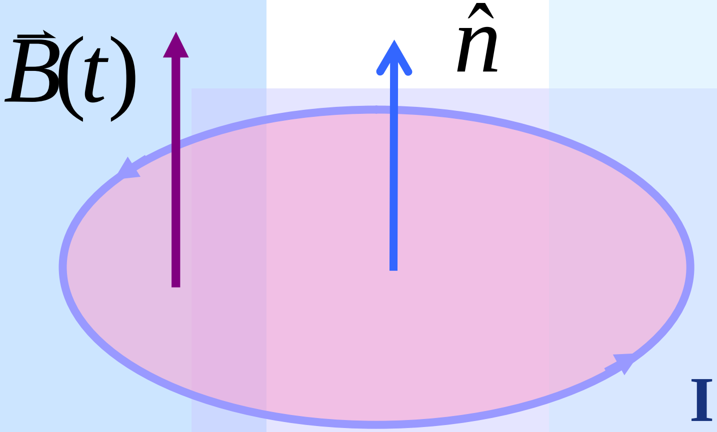
$$\dot{\phi} > 0 \Rightarrow \varepsilon < 0$$



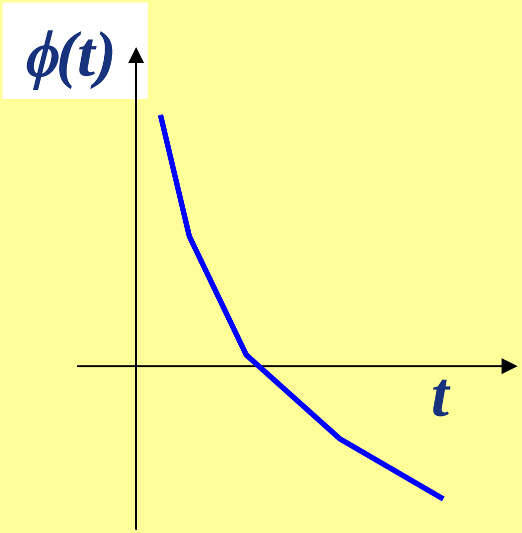
$\vec{B}$ **crece** $\Rightarrow$ **Corriente genera campo opuesto al crecimiento**

Ley de Faraday-Lenz

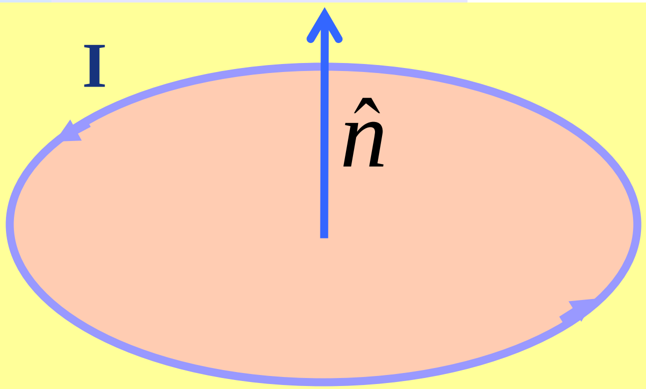
Un campo magnético variable genera o induce un FEM



$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$ **con** $$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



$$\dot{\phi} < 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$$



$\vec{B}$ **decrece** $\Rightarrow$ **Corriente genera campo opuesto al decrecimiento**

Modificación 3ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3ª Ecuación de Maxwell

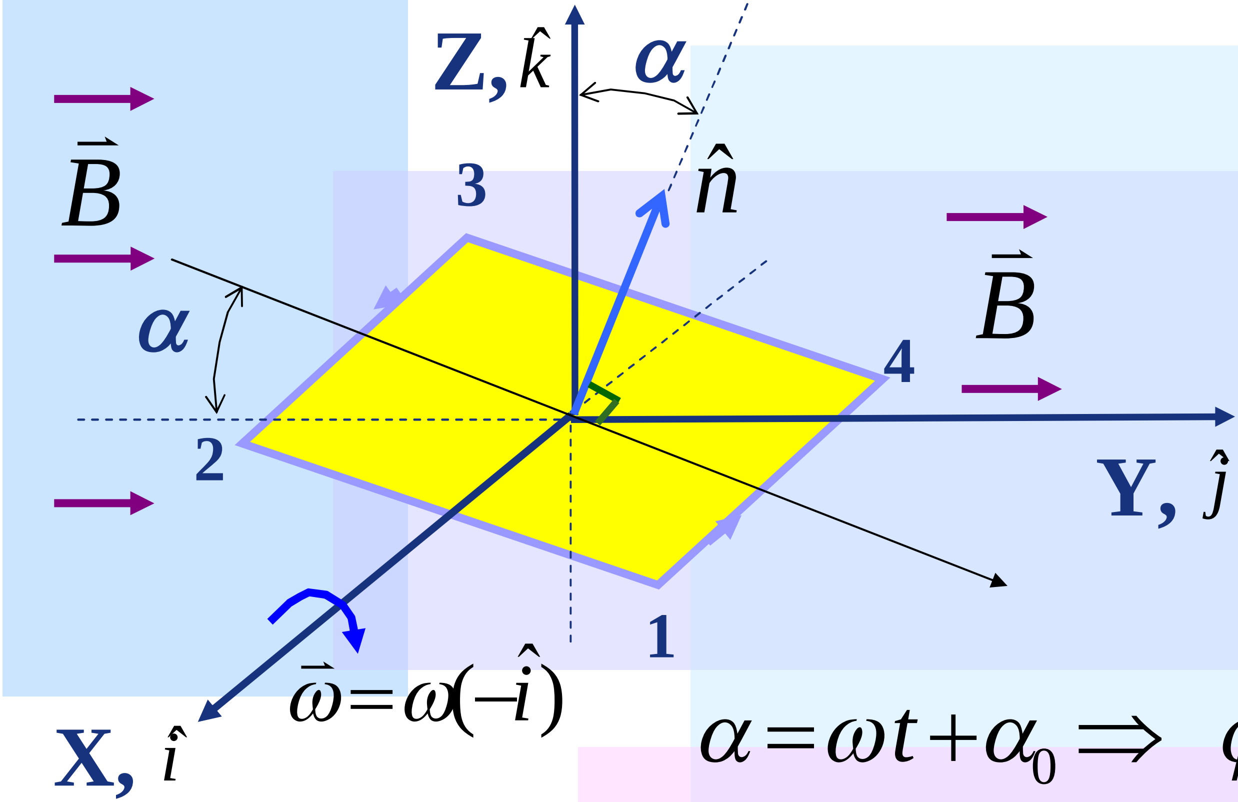
$$\Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

usando $\nabla \times (\nabla V) = 0$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\vec{E} = \overbrace{-\nabla V}^{\text{Origen electrostático}} - \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{Debido a campo magnético variable en el tiempo}}$$

Principio del generador



$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

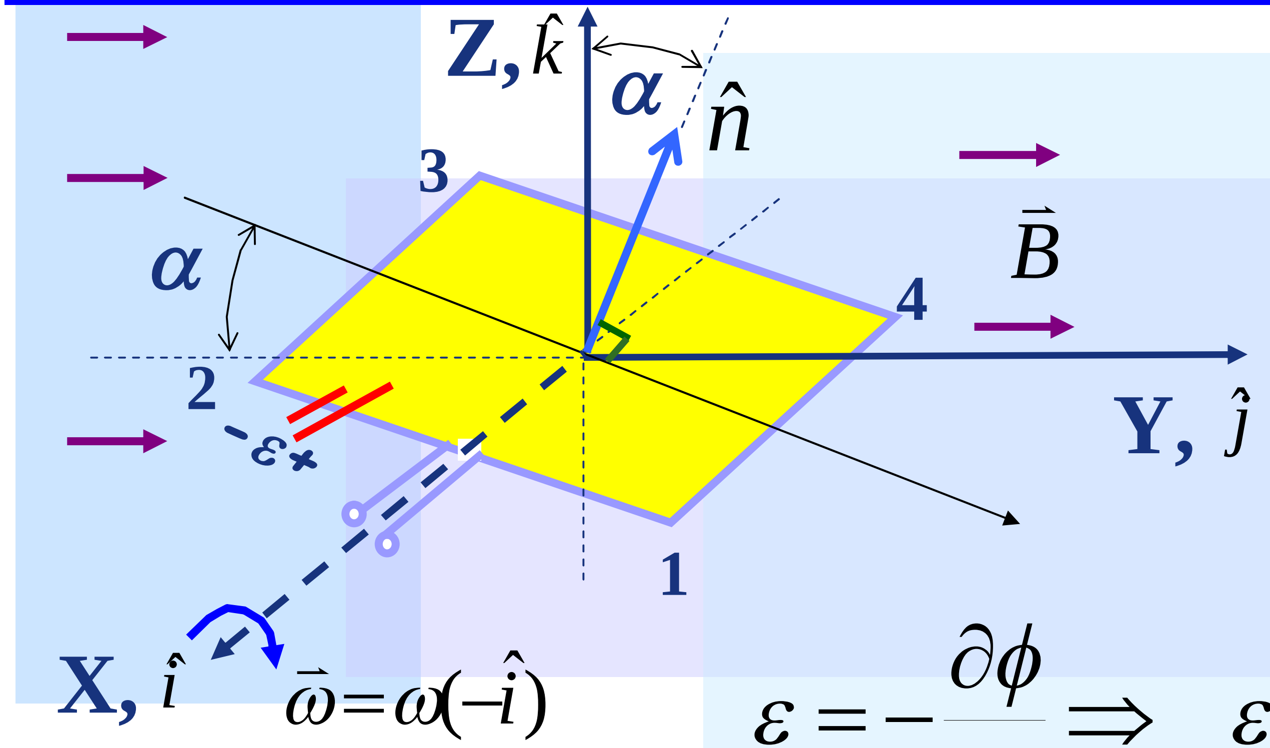
$$\phi = BA\sin\alpha$$

$$\alpha = \omega t + \alpha_0 \Rightarrow \quad \phi = BA\sin(\omega t + \alpha_0)$$

Ley de Faraday-Lenz

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \quad \varepsilon = B\omega\cos(\omega t + \alpha_0)$$

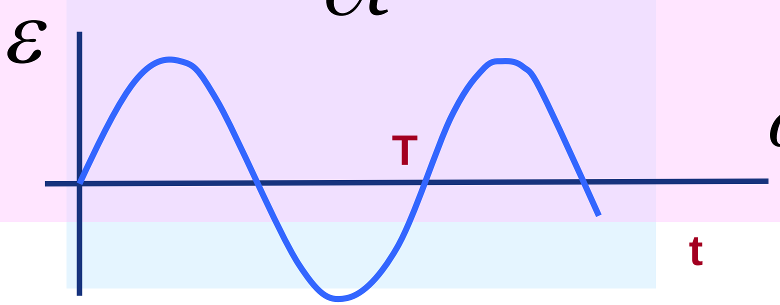
Principio del generador



$$\phi = \iint\limits_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

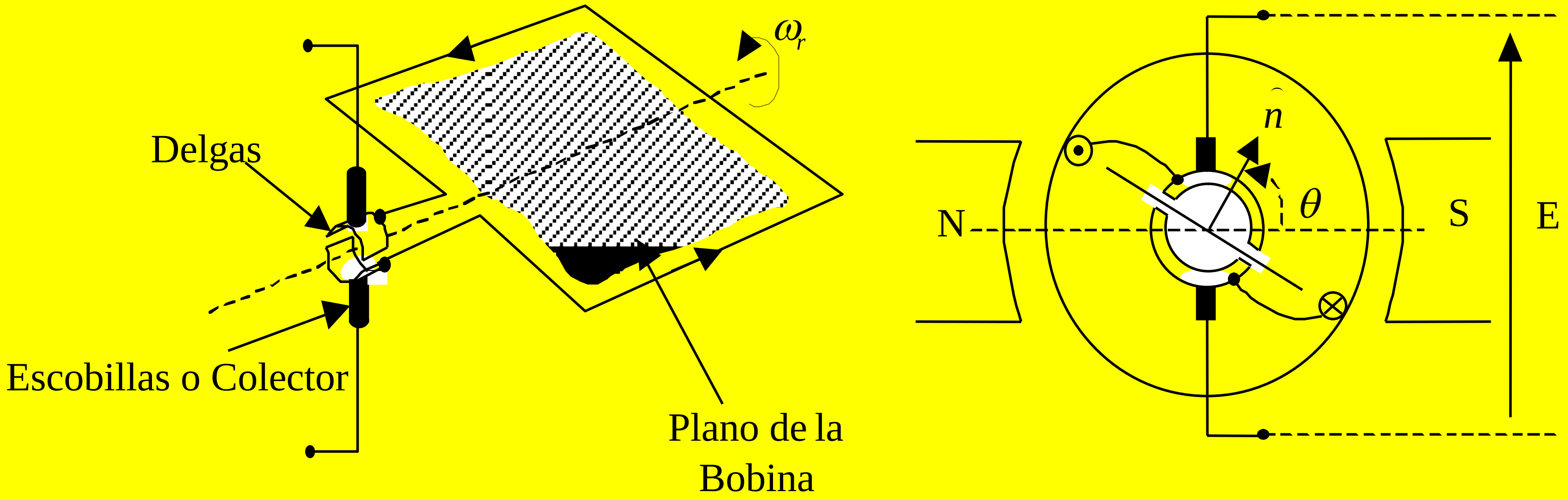
$$\phi = B\sin\alpha$$

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \quad \varepsilon = B\omega\cos(\omega t + \alpha_0)$$

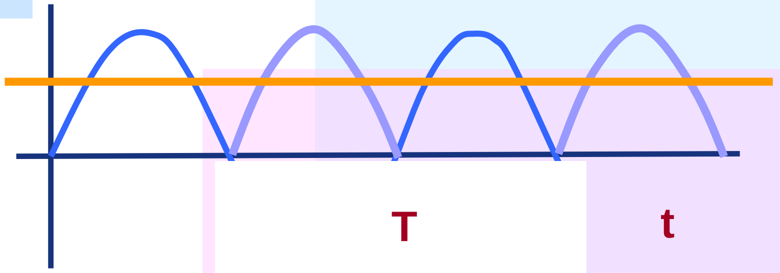


$$\omega = 2\pi f \Rightarrow T = \frac{1}{f}$$

Principio del generador de Corriente Continua

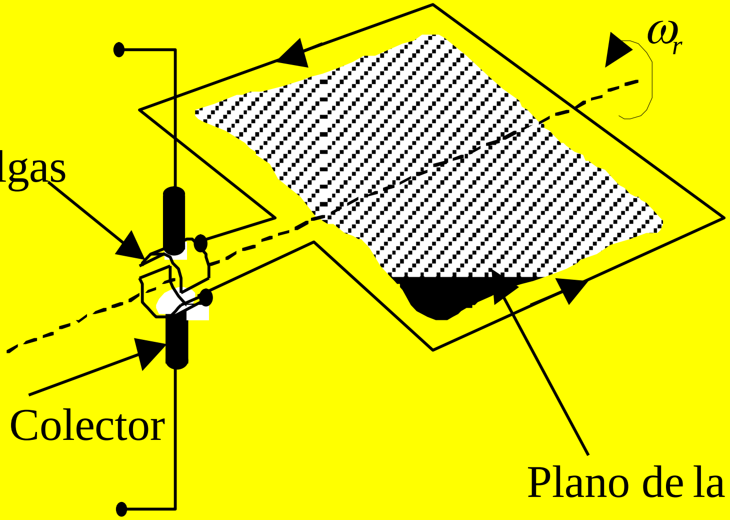


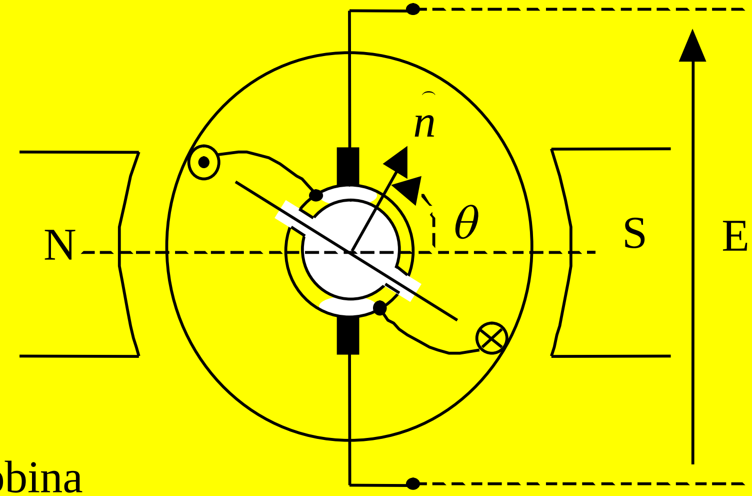
Valor medio no nulo

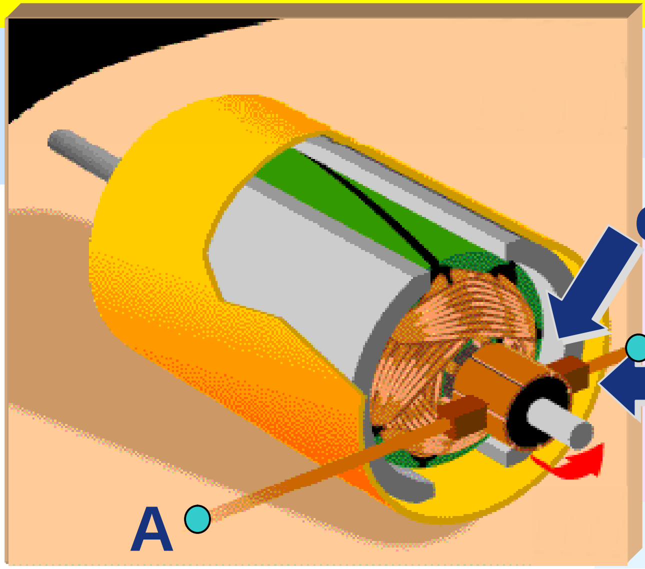


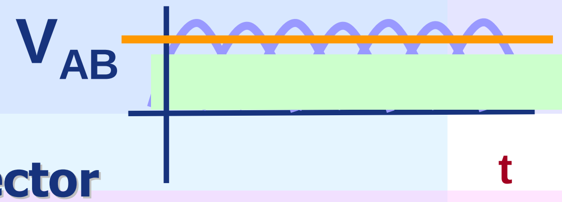
$$\omega = 2\pi f \Rightarrow T = \frac{1}{f}$$

Generador de Corriente Continua

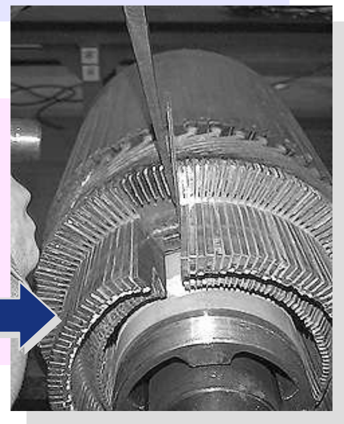






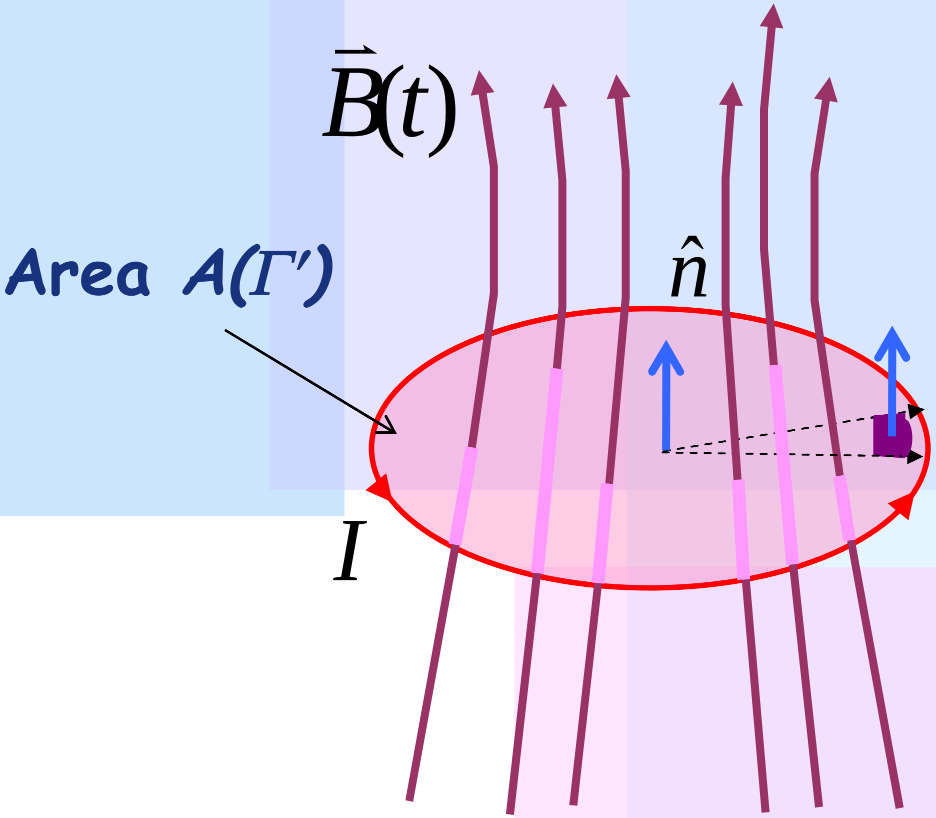


Colector real



Inductancia Propia

Campo producido SOLO por I

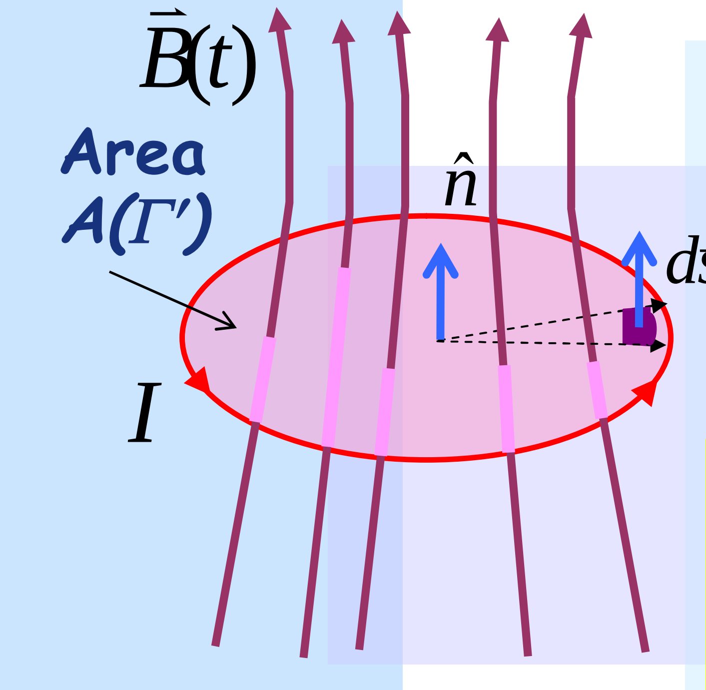


$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}$$

$$d\vec{s} = ds \cdot \hat{n}$$

$$\phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Inductancia Propia



$$d\vec{s} = ds \cdot \hat{n}$$

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$

$$\phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

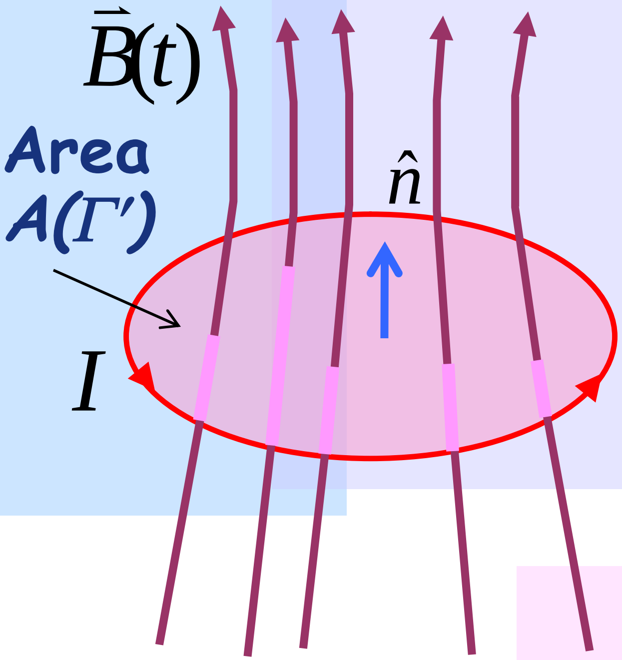
$$\phi = \iint_A \vec{B} \bullet d\vec{s} = \iint_A \left(\oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3} \right) \bullet d\vec{s}$$

$$L \equiv \frac{\phi}{I} = \iint_A \left(\oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3} \right) \bullet d\vec{s}$$

Inductancia propia del circuito

Inductancia Propia

Campo producido SOLO por I



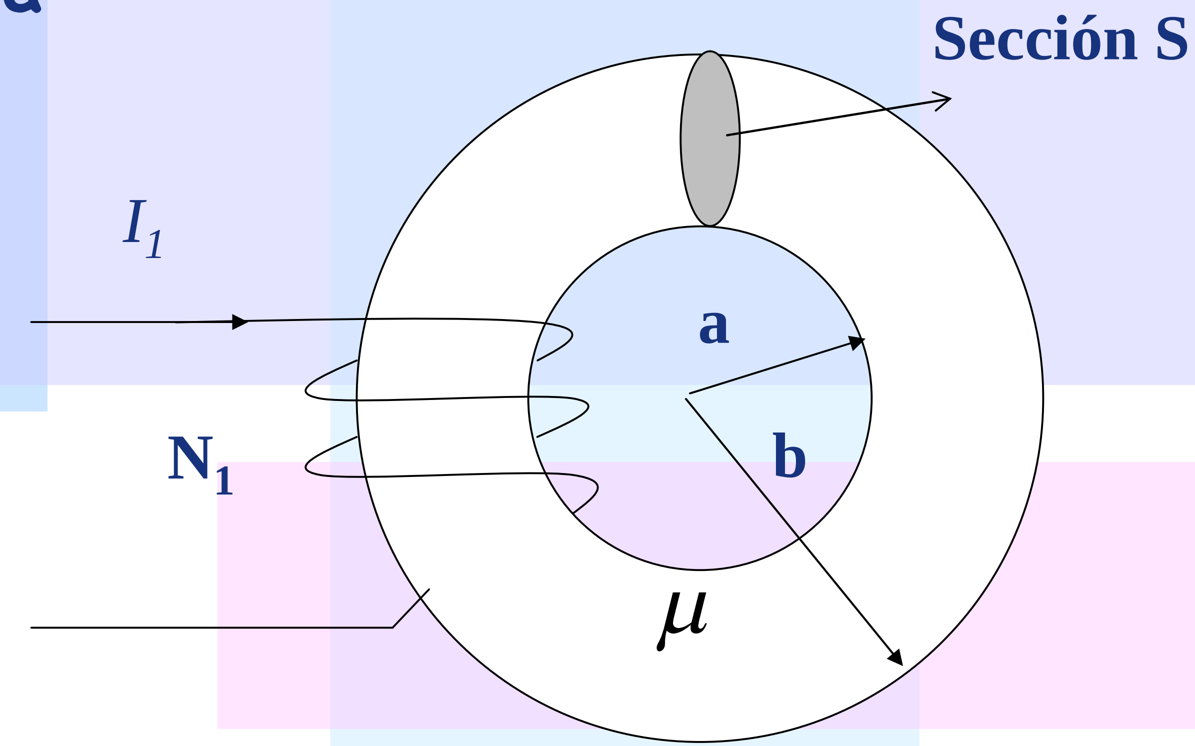
Inductancia propia del circuito

$$L \equiv \frac{\phi}{I} = \iint_A \left(\oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3} \right) \bullet d\vec{s}$$

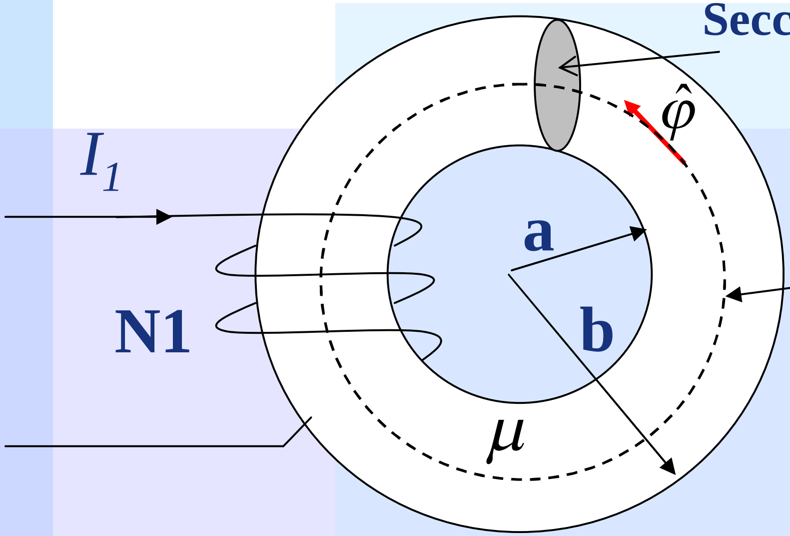
- NO depende de la corriente
- ni del flujo,
- Depende de la geometría
- [L]=Henry [H]

Inductancia propia

Ejemplo 1. Calcular la inductancia propia de la bobina de N_1 vueltas montada en el toroide de la figura



Inductancia Propia



$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Calculamos el campo magnético

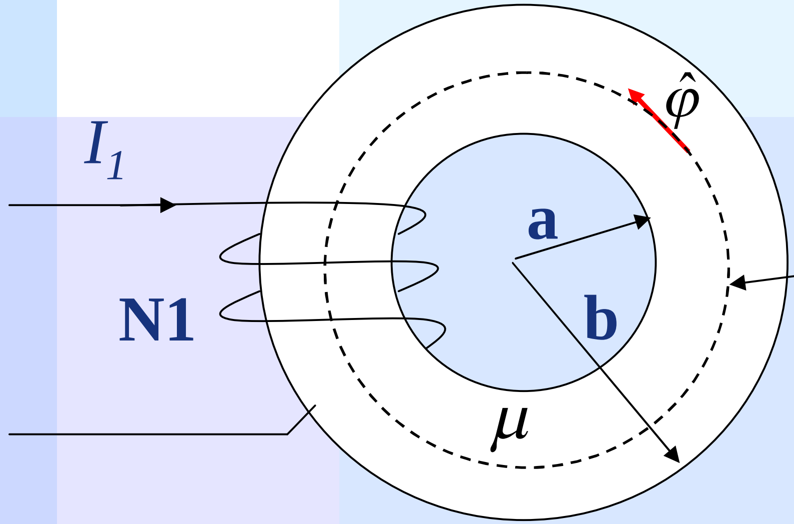
$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

Vemos que $\vec{H} = H\hat{\varphi}$

$$\oint_{C} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{0}^{2\pi} H(r)\hat{\varphi} \cdot r d\varphi \, \hat{\varphi}$$

$$\oint_{C} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi \, r H(r)$$

Inductancia Propia



Trayectoria C_1

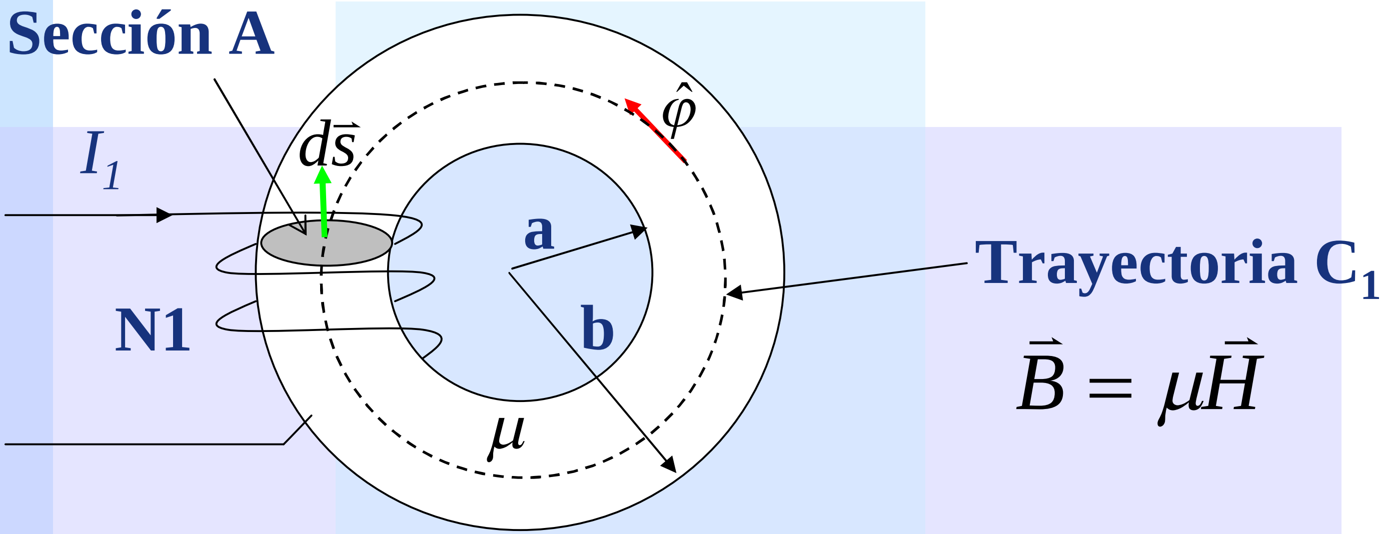
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Corriente total enlazada $I_{enlazada} = -N_1 I_1$

$$\Rightarrow rH(r)2\pi = -N_1 I_1 \Rightarrow \vec{H}(r) = -\frac{N_1 I_1}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

En el punto medio $\vec{H} = -\dfrac{N_1 I_1}{\pi(a+b)}\hat{\varphi} \Rightarrow \vec{B} = -\dfrac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)}\hat{\varphi}$

Inductancia Propia



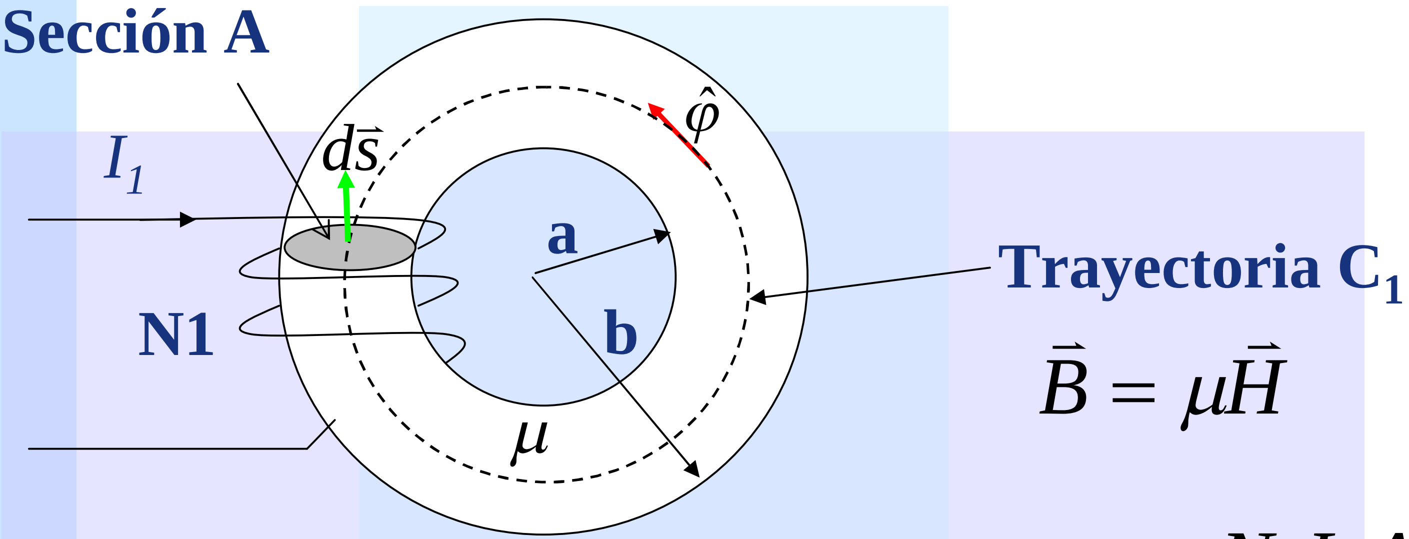
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Flujo enlazado por una vuelta $\phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s}$

De la figura $d\vec{s} = ds(-\hat{\varphi})$

$$\Rightarrow \iint_A \vec{B} \bullet d\vec{s} = \iint_A -\frac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)} \hat{\varphi} \bullet ds(-\hat{\varphi})$$

Inductancia Propia

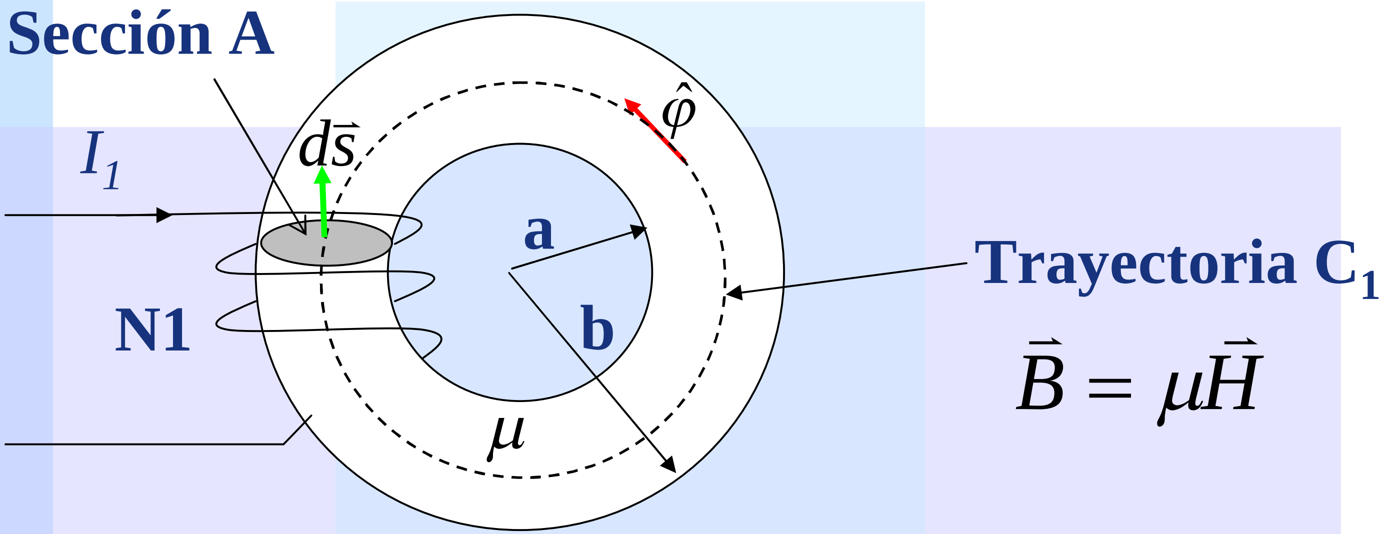


$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Flujo enlazado por una vuelta $$\phi = \frac{\mu N_1 I_1 A}{\pi(a+b)}$$

Flujo enlazado por todo el circuito $$\phi_T = N_1 \frac{\mu N_1 I_1 A}{\pi(a+b)}$$

Inductancia Propia



$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

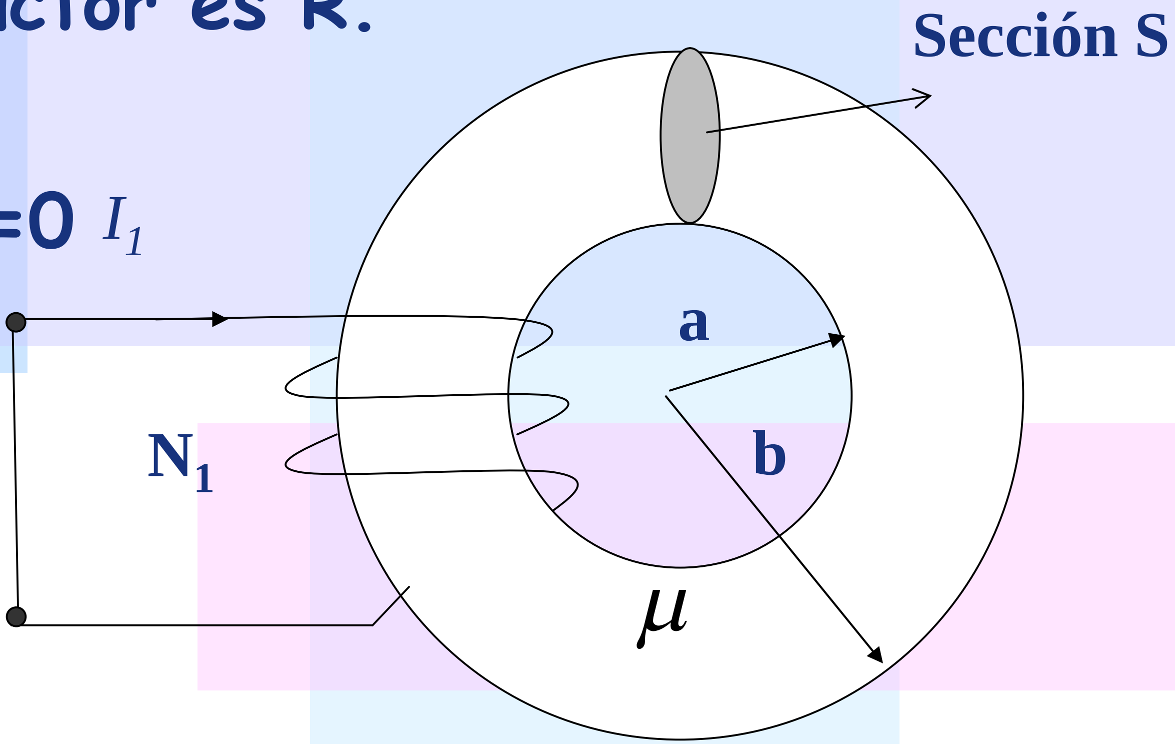
Flujo enlazado por todo el circuito $\phi_T = N_1 \dfrac{\mu N_1 I_1 A}{\pi (a+b)}$

Inductancia propia del circuito $L \equiv \dfrac{\phi_T}{I_1} = \dfrac{\mu N_1^2 A}{\pi (a+b)}$

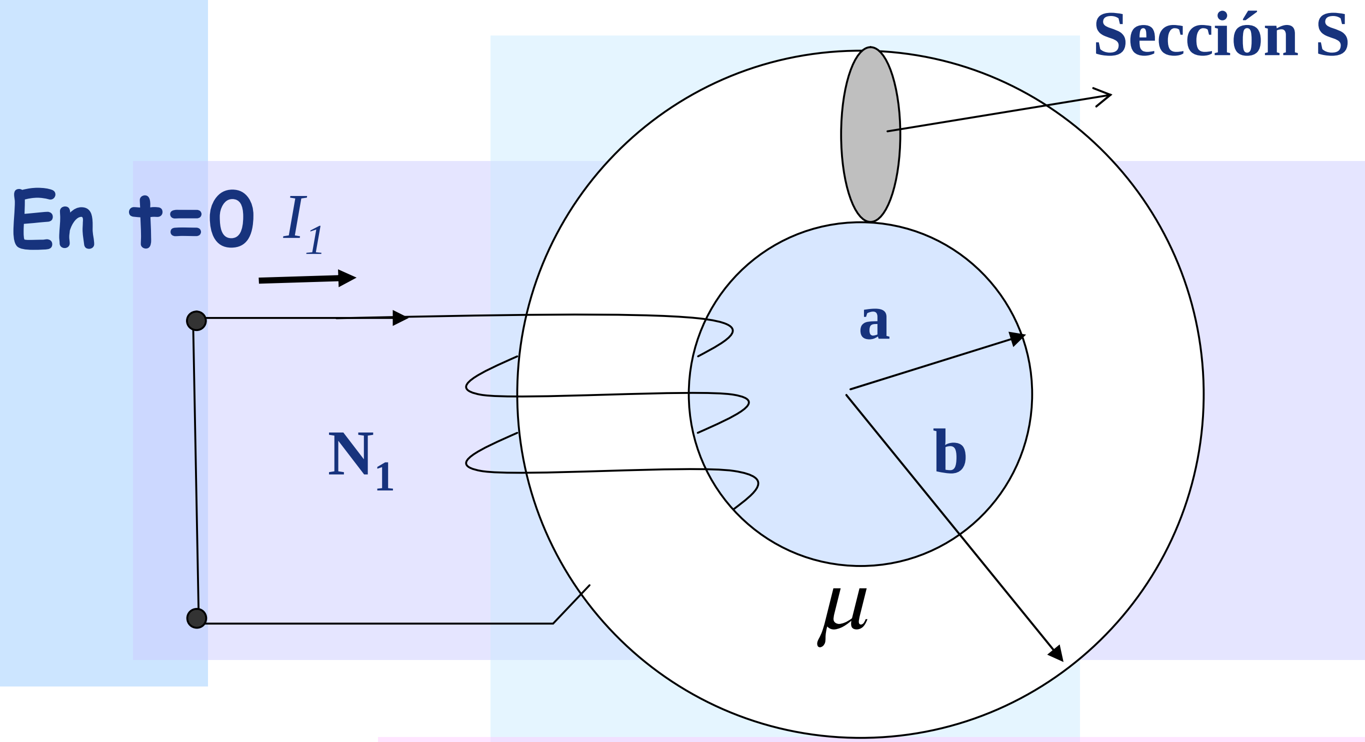
Inductancia propia

Suponga ahora que cuando circulaba una corriente I_1 se cortocircuita el conductor. Se pide calcular la corriente en función del tiempo si la resistencia del conductor es R.

En t=0 I_1



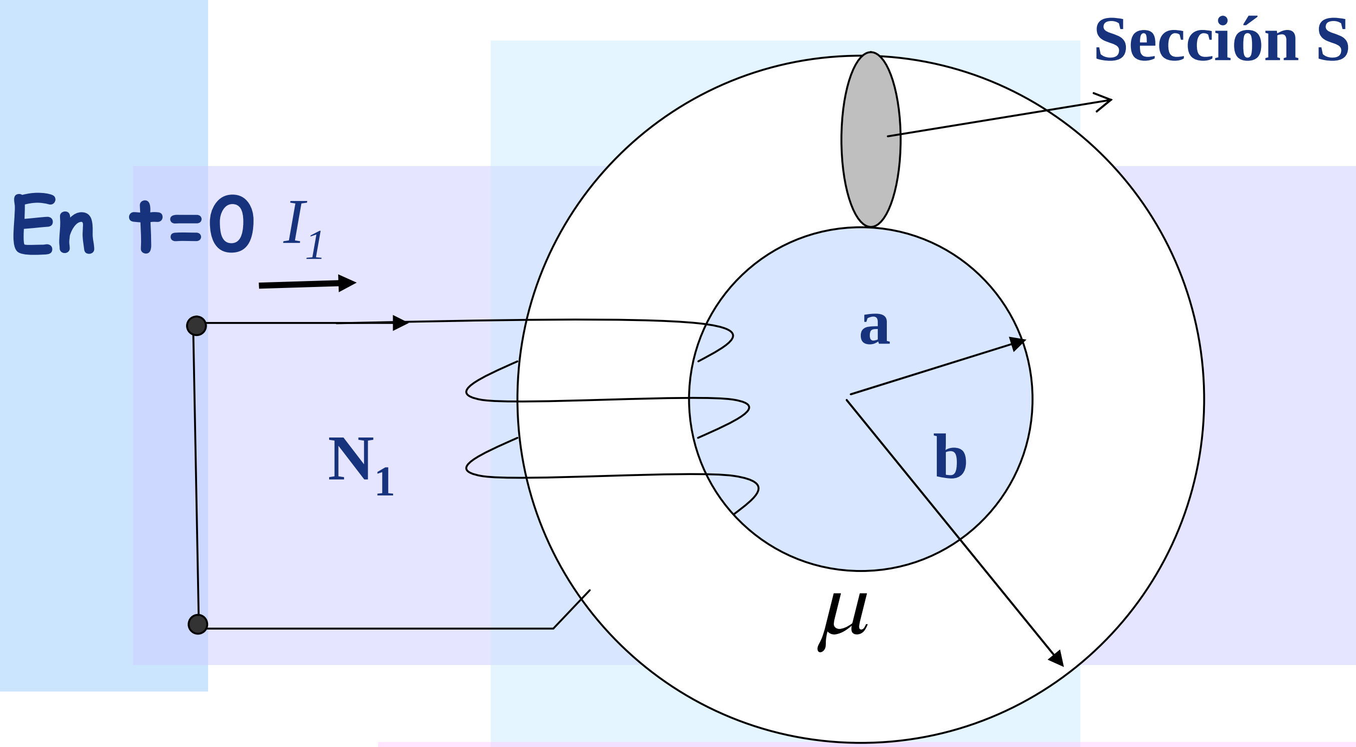
Inductancia propia



Se cumple $\phi = LI_1$ donde $L = \dfrac{\mu N_1^2 A}{\pi(a+b)}$

Si hay fem inducida cumple con $\varepsilon = -\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$

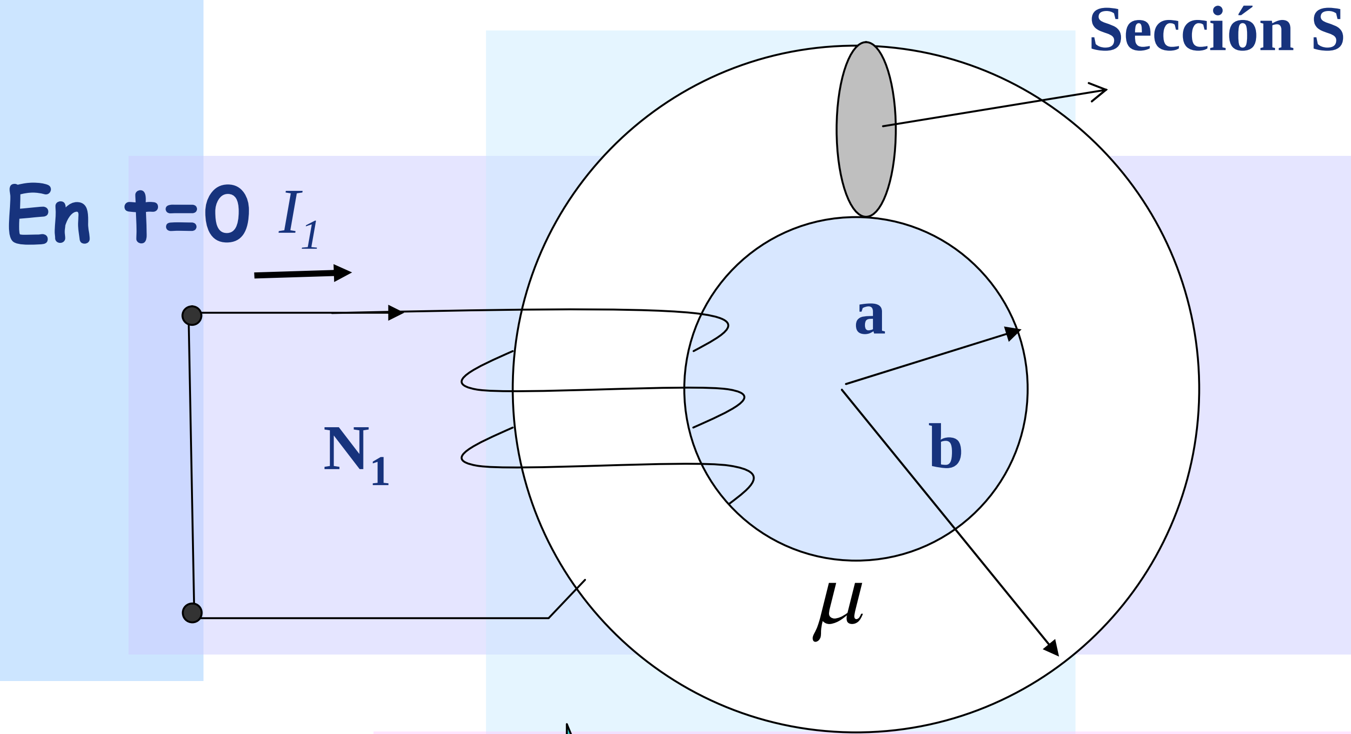
Inductancia propia



Si hay fem inducida cumple con $\varepsilon = -L\dfrac{\partial I}{\partial t}$

Por otra parte la resistencia impone que $\varepsilon = RI$

Inductancia propia

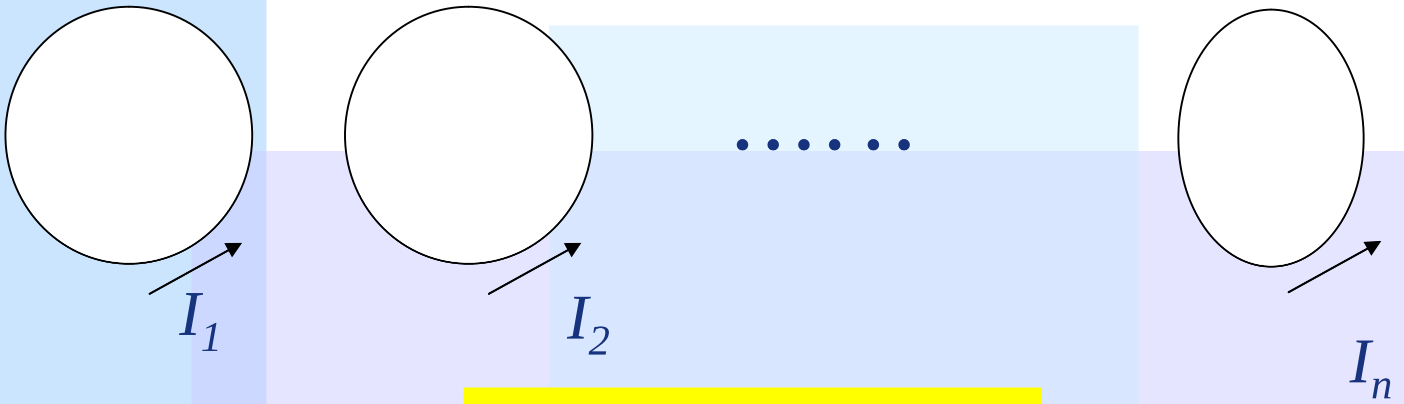


$$-L\frac{\partial I}{\partial t} = RI \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{R}{L}I = 0 \quad \Rightarrow \quad I(t) = Ae^{-t/\tau} \qquad \tau = L/R$$

En t=0 $\quad I(t=0) = I_1$

$$\therefore I(t) = I_1 e^{-t/\tau}$$

Inductancia mutua



n circuitos

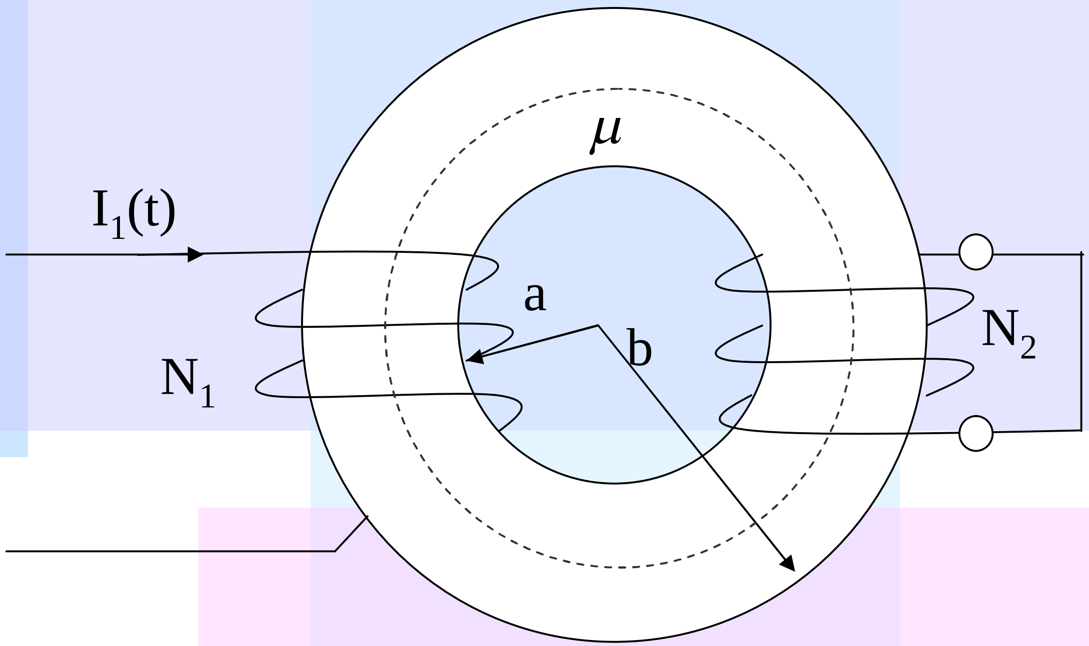
Sea ϕ_{jk} el flujo magnético que atraviesa el circuito j debido SOLO a la corriente que circula por el circuito k

Inductancia mutua entre el circuito j y k $$Ljk = \frac{\phi_{jk}}{I_k}$$

Se cumple $L_{jk} = L_{kj}$ PROBARLO!

Inductancia mutua

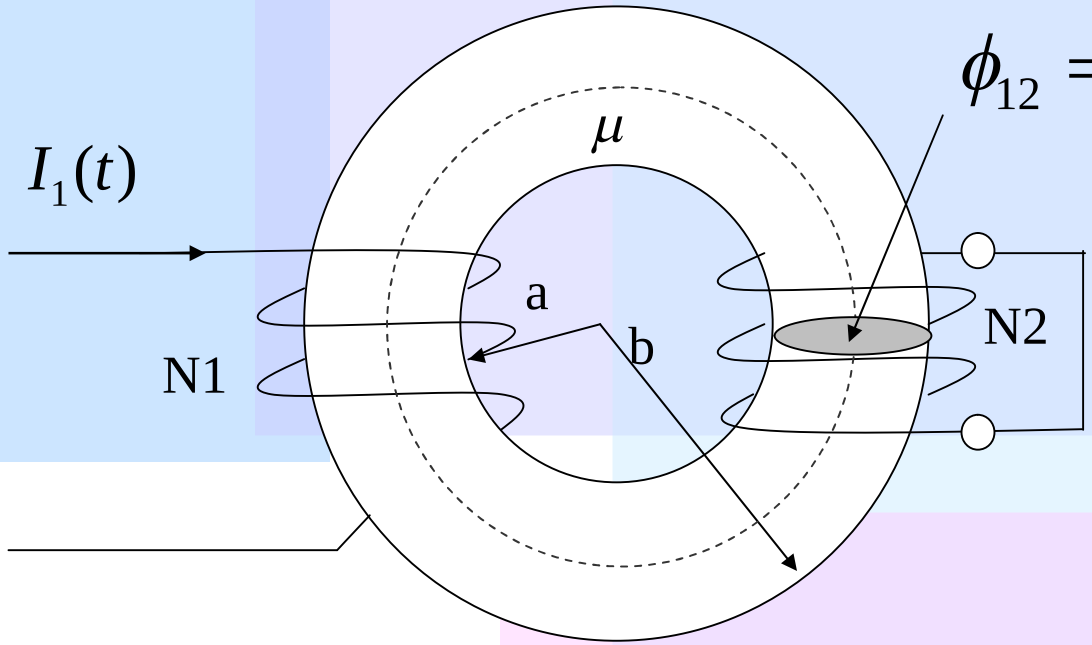
Ejemplo 2. Calcular la inductancia mutua entre los circuitos montados en el toroide de la figura



Inductancia mutua

Ejemplo 2. Calcular la inductancia mutua entre los circuitos montados en el toroide de la figura

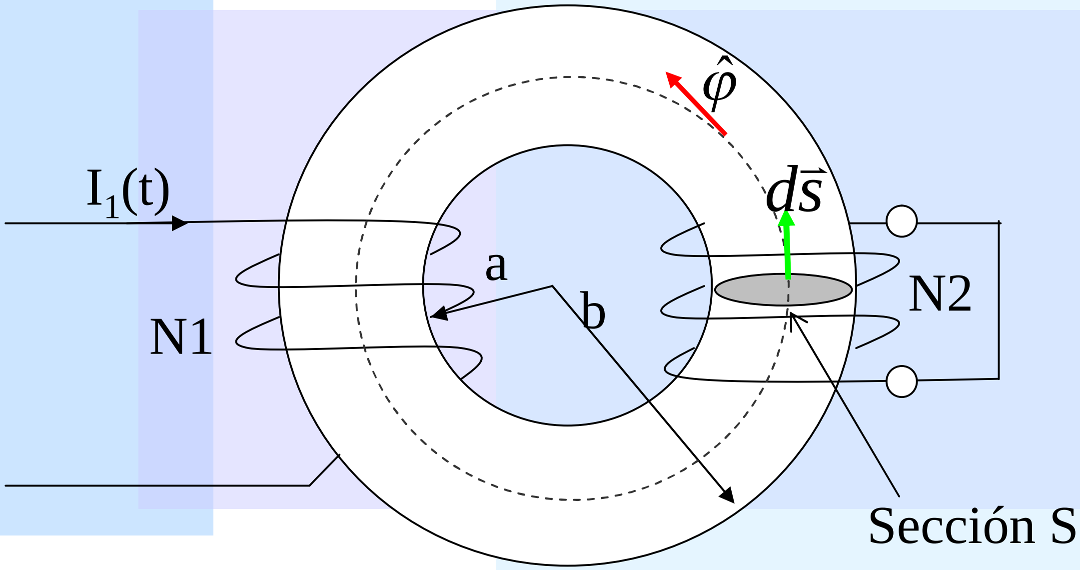
$$\phi_{12} = N_2 \times \underbrace{Flujo\ espira}_{\phi_e}$$



Inductancia mutua entre el circuito 1 y 2 $L_{12} \equiv \dfrac{\phi_{12}}{I_1}$

Inductancia mutua

Campo producido por I_1 es $\vec{B} = -\dfrac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)}\hat{\varphi}$



Flujo en S es

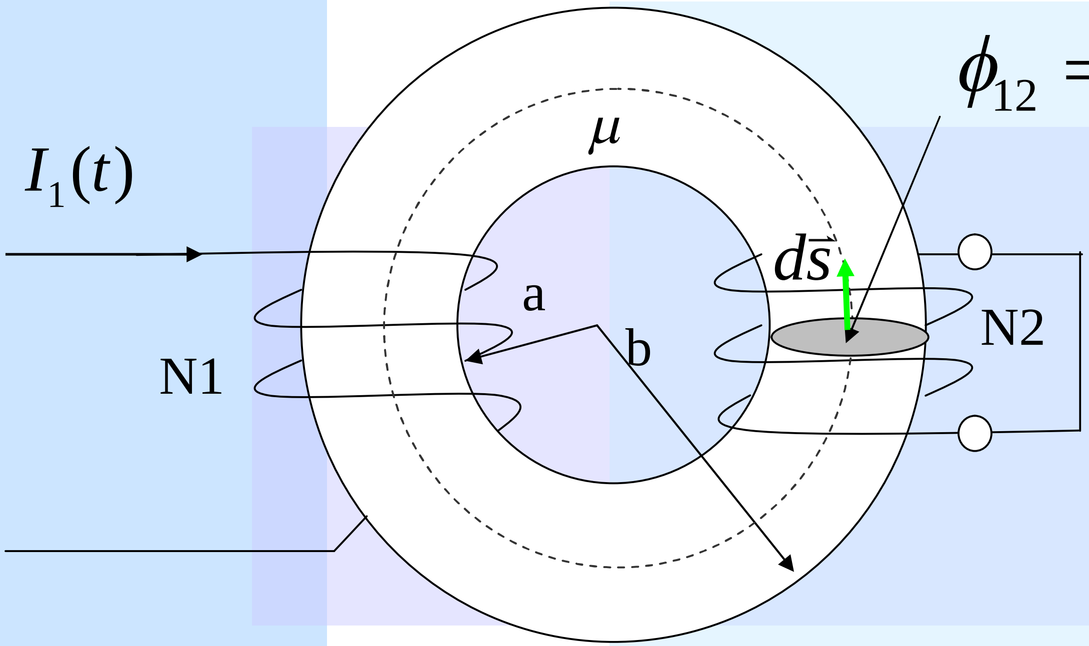
$$\phi_e = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

De la figura $d\vec{s} = ds\hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{B}\bullet d\vec{s} = \iint_S -\frac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)}\hat{\varphi}\bullet ds\hat{\varphi}$$

$$\therefore \phi_e = -\frac{\mu N_1 I_1 S}{\pi(a+b)}$$

Inductancia mutua



$$\phi_{12} = N_2 \times \underbrace{Flujo\ espira}_{\phi_e}$$

$$\phi_{12} = -\frac{\mu N_2 N_1 I_1 S}{\pi(a+b)}$$

Inductancia mutua entre el circuito 1 y 2 $L_{12} \equiv \dfrac{\phi_{12}}{I_1}$

$$\therefore \quad L_{12} = -\frac{\mu N_2 N_1 S}{\pi(a+b)}$$

Corriente de Desplazamiento

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell

Tomando la divergencia

$$\underbrace{\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{H} \right)}_{\text{Nulo}} = \nabla \cdot \vec{J}$$

$$0 = \nabla \cdot \vec{J}$$

Pero por la ecuación de continuidad se cumple

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Luego hay una contradicción !?#@

Corriente de Desplazamiento

Cuando no hay corriente $\vec{J}=0$, pero SI hay campos eléctricos variables se encuentra experimentalmente la relación

$$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Así, el termino $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ debe sumarse a la 4ª ecuación, lo que da finalmente:

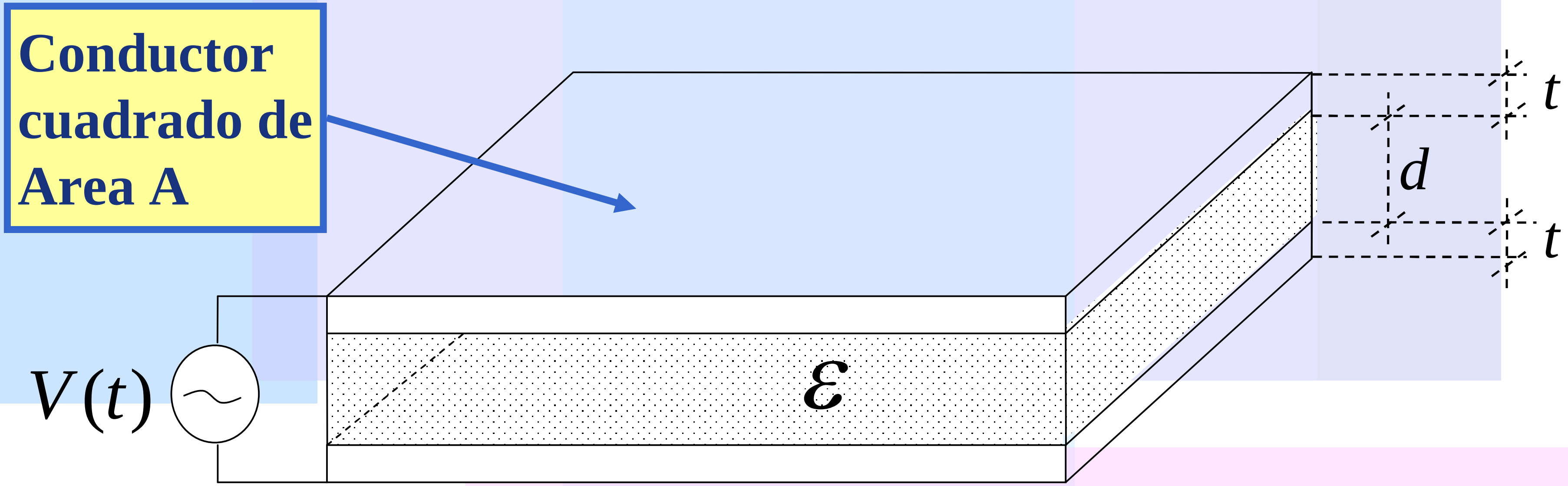
$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\underbrace{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}_{\text{Corriente de desplazamiento}}$$

4ª Ecuación de Maxwell

Corriente de desplazamiento

Corriente de Desplazamiento

Ejemplo 3. Calcular corriente de desplazamiento en el interior del condensador alimentado por sinusoide

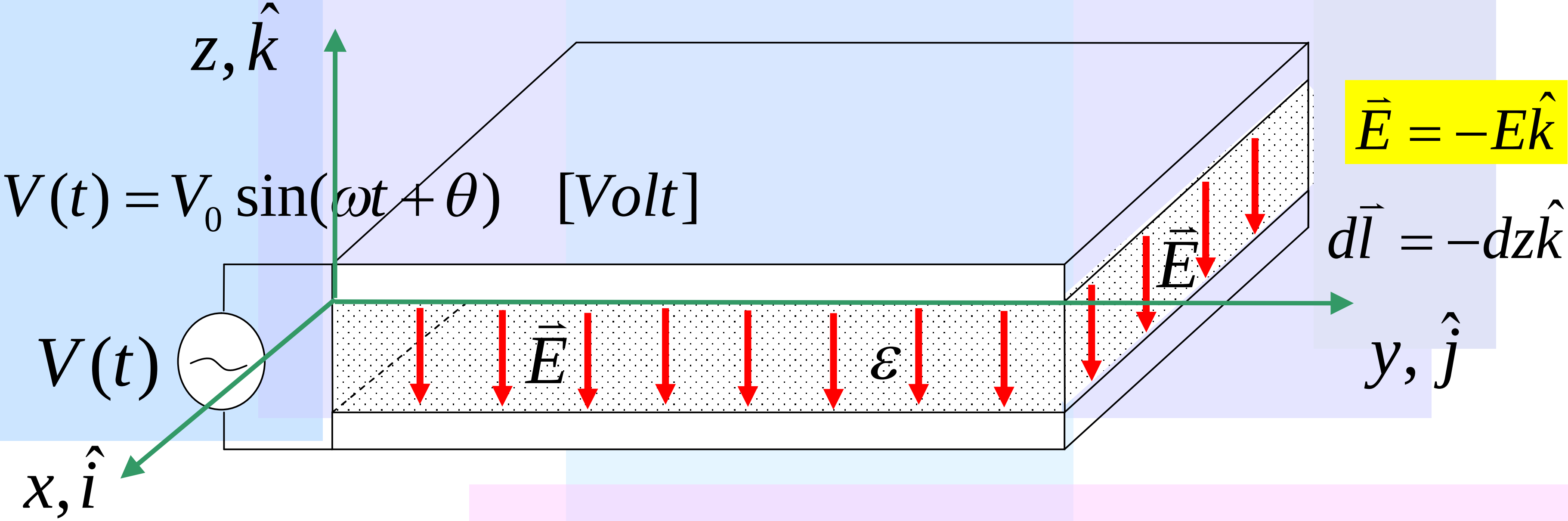


$$V(t) = V_0 \sin(\omega t + \theta) \quad [Volt]$$

Corriente de Desplazamiento

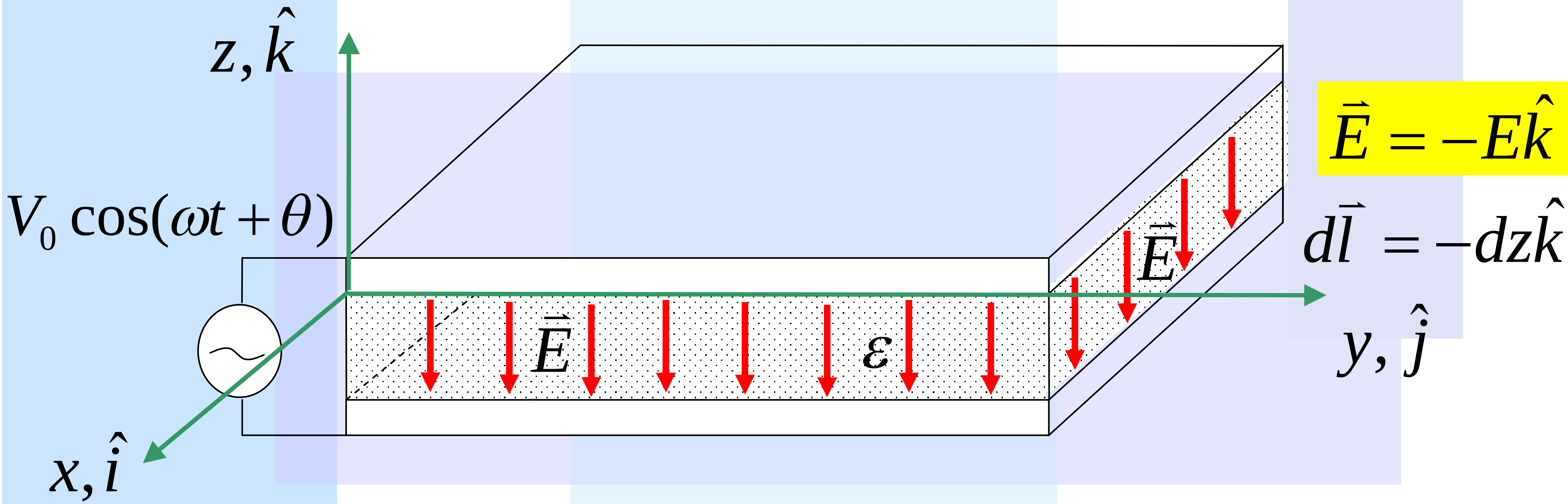
Corriente de desplazamiento $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ usamos $\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$

$$V(t) = V_0 \sin(\omega t + \theta) \quad [Volt]$$



Además $V(z_1) - V(z_2) = \displaystyle\int_{z=z_1}^{z=z_2} \vec{E} \bullet d\vec{l}$ $\Rightarrow$ $V(t) = -\displaystyle\int_{z=0}^{z=-d} \vec{E} \bullet d\vec{l} = Ed$

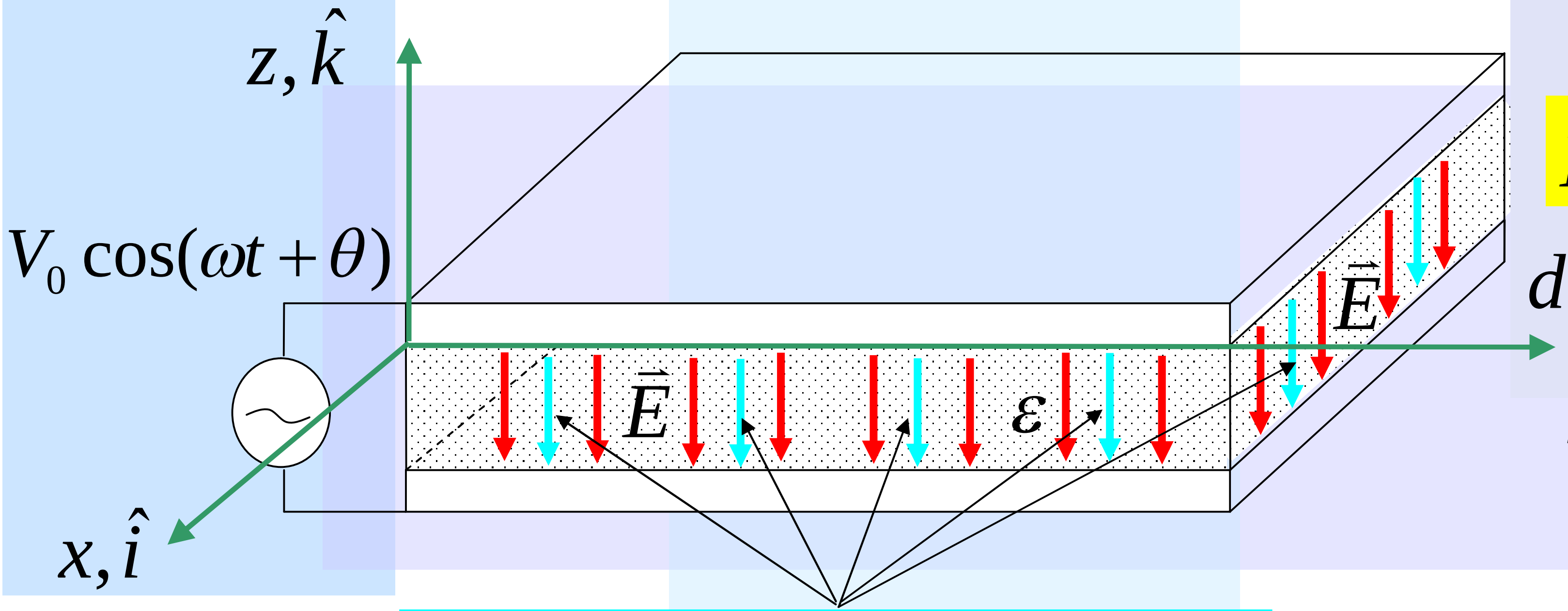
Corriente de Desplazamiento



$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{V_0}{d}\sin(\omega t + \theta)\hat{k} \Rightarrow \vec{D} = -\frac{\varepsilon V_0}{d}\sin(\omega t + \theta)\hat{k}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\omega \varepsilon V_0}{d}\cos(\omega t + \theta)\hat{k}$$

Corriente de Desplazamiento

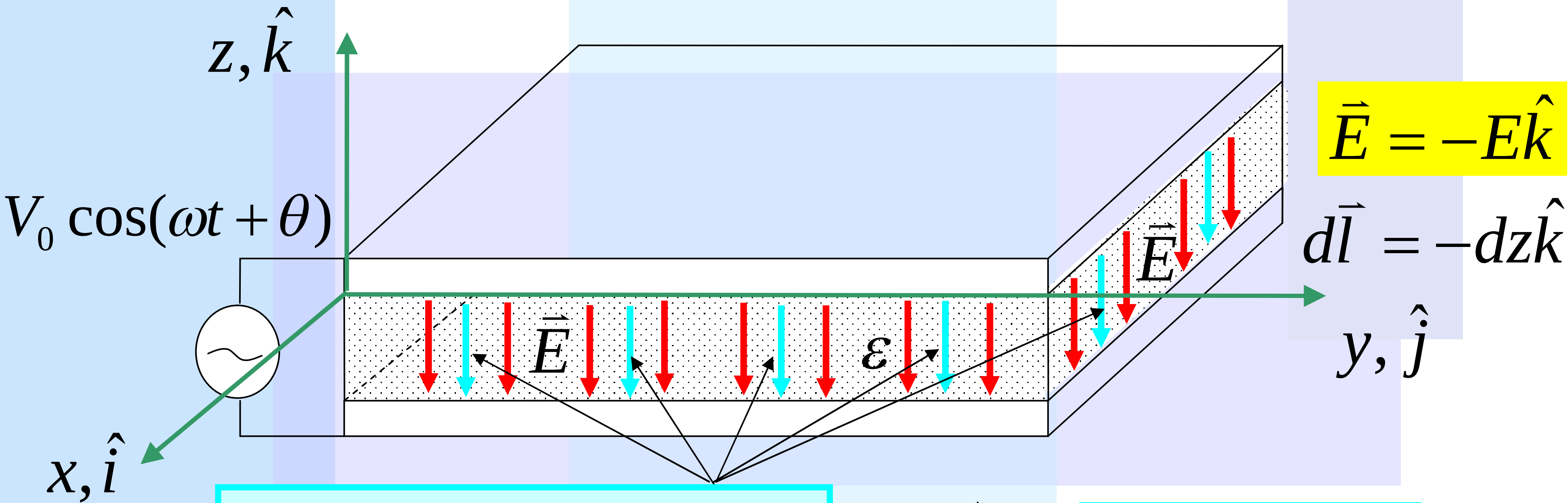


$$\vec{E} = -E\hat{k}$$

$$d\vec{l} = -dz\hat{k}$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\omega \varepsilon V_0}{d}\cos(\omega t + \theta)\hat{k} \equiv \vec{J}_D}$$

Corriente de Desplazamiento

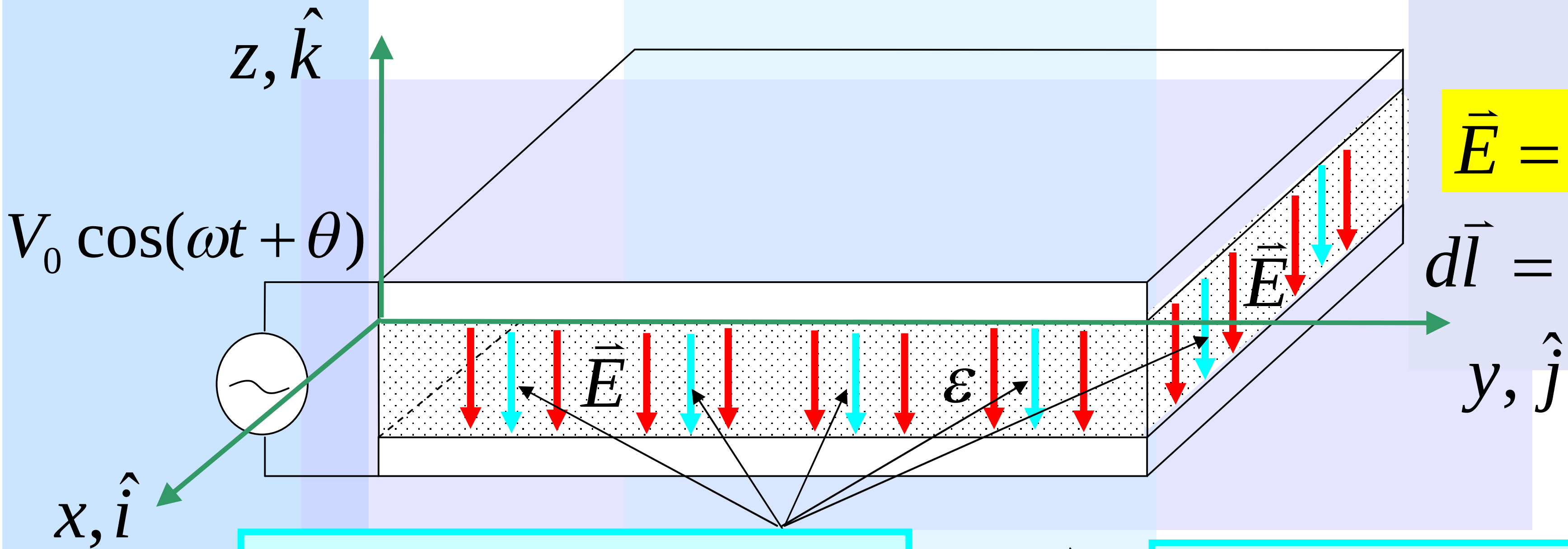


$$\vec{J}_D = -\frac{\omega \varepsilon V_0}{d}\cos(\omega t + \theta)\hat{k}$$

$$I_D = \iint_A \vec{J}_D \bullet d\vec{s}$$

$$I_D = \iint_A -\frac{\omega \varepsilon V_0}{d}\cos(\omega t + \theta)\hat{k} \bullet ds(-\hat{k}) = \frac{A\varepsilon}{d}\omega V \cos(\omega t + \theta)$$

Corriente de Desplazamiento



$$\vec{E} = -E\hat{k}$$

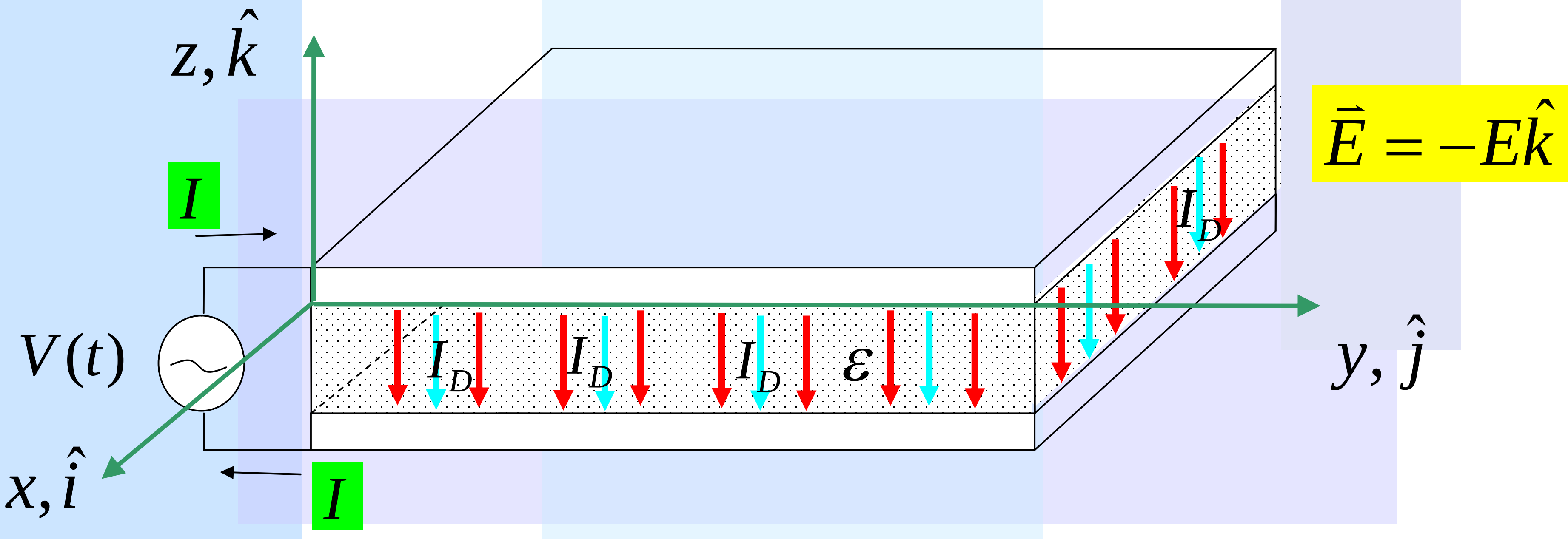
$$d\vec{l} = -dz\hat{k}$$

$$\vec{J}_D = -\frac{\omega \varepsilon V_0}{d} \cos(\omega t + \theta)\hat{k}$$

$$I_D = \frac{A\varepsilon}{d} \omega V_0 \cos(\omega t + \theta)$$

$$C = \frac{A\varepsilon}{d} \Rightarrow I_D = C\omega V_0 \cos(\omega t + \theta)$$

Corriente de Desplazamiento



Ecuación característica del condensador $Q = CV$

Ecuación de corriente $I = \dfrac{dQ}{dt} = C\dfrac{dV}{dt}$

$$\Rightarrow \quad I = C\omega V_0 \cos(\omega t + \theta) \quad \therefore \quad I = I_D$$