

Auxiliar N°12 FI33A

Prof. auxiliar: Luis Sánchez L

Problema 1

Se tiene un cilindro conductor de radio a , muy largo. Por la superficie del conductor, circula una corriente superficial caracterizada por su vector densidad de corriente $\vec{J} = J_s \hat{\theta}$.

a) Determine el campo magnetico al interior del cilindro (HINT: demuestre primero que el campo es constante al interior)

b) Determine la presion que el campo magnetico ejerce sobre las paredes del cilindro. NOTA: El campo que produce la presion es la mitad del campo calculado en la parte (a).

Solucion Debido a la simetria del problema y a que el conductor es muy largo, podemos suponer que el campo no depende de z ni de θ . Además, por el sentido que tiene la corriente, el campo magnetico apunta en la direccion $\hat{k}$. Con todo esto, obtenemos

$$\vec{B} = B(r)\hat{k}$$

Como al interior del cilindro no hay densidad de corriente, se tiene que:

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{0}$$

Calculando el rotor en coordenadas cilindricas, obtenemos:

$$-\frac{\partial B}{\partial r}\hat{\theta} = \vec{0}$$

Con lo cual obtenemos que $\vec{B}$ no depende de r , por lo tanto, al interior del cilindro, no depende ni de z , ni de r , ni de θ , por lo tanto, es constante.

Como el campo al interior es constante, podemos tomar cualquier trayectoria cerrada que encierre cierta corriente para calcularlo. Utilizaremos un rectangulo de lados l y r_0 que encierre parte de la corriente superficial. Aplicando la ley de ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazado}$$
$$\int_0^l B\hat{k} \cdot \hat{k}dz + \int_0^{r_0} B\hat{k} \cdot \hat{r}dr + \int_l^0 B\hat{k} \cdot -\hat{k}dz + \int_{r_0}^0 B\hat{k} \cdot -\hat{r}dr = \mu_0 l J_s$$

NOTA:Para obtener la corriente enlazada de una distribucion superficial de corriente, simplemente multiplicamos (o integramos) por un largo y obtenemos la corriente total que fluye en ese largo.

Es facil darse cuenta que el campo fuera del cilindro es cero (aplicando la ley de ampere a un anillo de radio r mayor que a), con esto obtenemos:

$$\int_0^l B \hat{k} \cdot \hat{k} dz = \mu_0 l J_s$$

$$Bl = \mu_0 l J_s$$

$$B = \mu_0 J_s$$

$$\vec{B} = \mu_0 J_s \hat{k}$$

Para calcular la presion que ejerce el campo magnetico al cilindro, calculamos la fuerza por unidad de area. Para esto usamos la formula:

$$d\vec{F} = \vec{J} \times d\vec{B}$$

Donde $\vec{B}$ es el que produce la presion. En este caso, el enunciado nos dice que el campo que produce la presion es la mitad del campo al interior del cilindro. Reemplazando en la formula obtenemos:

$$d\vec{F} = \vec{J} \times d\vec{B}$$

$$d\vec{F} = J_s \hat{\theta} \times \frac{\mu_0 J_s \hat{k}}{2} dS$$

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0 J_s^2}{2} \hat{r} dS$$

Esta ultima igualdad nos dice que existe una fuerza por unidad de area apuntando en la direccion radial, por lo tanto, la presion es:

$$P = \frac{\mu_0 J_s^2}{2}$$

Problema 2

Un cilindro muy largo, de radio interior a y exterior b está polarizado, con un vector polarización $\vec{P} = P_0(a/r)\hat{r}$. El cilindro rota en torno a su eje de simetría con velocidad angular ω . Despreciando los efectos de borde, calcule:

- Las densidades de carga de polarización y las corrientes correspondientes.
- El campo magnético en todo el espacio.

Solucion Las densidades de carga de polarización se calculan como

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Entonces tenemos

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rP(r)) = 0.$$

Ahora, en la superficie $r = a$, $\hat{n} = -\hat{r}$, mientras que en $r = b$, $\hat{n} = +\hat{r}$, por lo tanto las densidades superficiales de carga de polarización son:

$$\sigma_a = -P_0$$

$$\sigma_b = P_0 \frac{a}{b}$$

Las densidades de carga σ_a y σ_b giran en torno al eje del cilindro, por lo cual producen densidades de corriente superficiales

Para calcular el campo magnético, usamos la ley circuital de Ampere, en la forma

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I(c).$$

El campo magnético tiene la dirección vertical, $\vec{B} = B\hat{k}$, por lo que evidente $B = 0$ para $r < a$, y también para $r > b$. Tomando una trayectoria rectangular, de altura h , tenemos

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = hB = \mu_0 h a \omega P_0,$$

por lo tanto

$$\vec{B} = \mu_0 a \omega P_0 \hat{k}.$$

Problema 3 Se tiene un casquete esférico de radio R que tiene una densidad de carga superficial σ_0 . El casquete se hace rotar en torno a su eje vertical con velocidad angular w . Encuentre el campo magnético en todo el espacio.

Solucion Propuesto