Pauta Control 2 P1 y P2 FI33A

Prof. auxiliar: Luis Sánchez L

Problema 1
parte a
Aplicando LVK a un trozo infinitesimal de circuito de longitud Δx, tenemos:

$$-V(x) + I(x)\Delta x R + V(x + \Delta x) = 0$$

Acomodando convenientemente, queda:

$$\frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} = -I(x)R$$

y tomando $\Delta x \to 0$:

$$\frac{dV}{dx} = -IR \tag{1}$$

Aplicando ahora LCK para el mismo circuito infinitesimal de longitud Δx, tenemos:

$$I(x) - I(x + \Delta x) - G\Delta x V(x + \Delta x) = 0$$

Acomodando convenientemente, queda:

$$\frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = -GV(x + \Delta x)$$

y tomando $\Delta x \to 0$:

$$\frac{dI}{dx} = -GV \tag{2}$$

Derivando la ecuacion (2) respecto a x obtenemos:

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = -G\frac{dV}{dx} \quad (1{,}5\,pts) \tag{3}$$

Y reemplazando la ecuacion (1) en la ecuacion (3) obtenemos una ecuacion diferencial para I que depende solo de x.

$$\frac{d^2 I}{dx^2} - RGI = 0 \tag{4}$$

parte b
Derivando la ecuacion (1) obtenemos:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -R\frac{dI}{dx} \tag{5}$$

Y reemplazando la ecuacion (2) en (4) obtenemos la ecuacion diferencial para V que depende solo de x

$$\frac{d^2V}{dx^2} - RGV = 0 \quad (1{,}5\,pts) \tag{6}$$

parte c
Debemos resolver:

$$\frac{d^2V}{dx^2} - RGV = 0$$

La solucion de esta ecuacion es conocida, y es de la forma:

$$V(x) = K_1 e^{\sqrt{RG}x} + K_2 e^{-\sqrt{RG}x}$$

Aplicando condiciones de borde, tenemos:

$$V(x=0) = K_1 + K_2 = V_0$$
$$V(x=L) = K_1 e^{\sqrt{RG}L} + K_2 e^{-\sqrt{RG}L} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, se encuantra la solucion:

$$V(x) = \frac{V_0}{e^{\sqrt{RG}L} - e^{-\sqrt{RG}L}}(e^{\sqrt{RG}(L-x)} - e^{-\sqrt{RG}(L-x)}) \quad (1{,}5\,pts)$$

Es facil comprobar que cumple con las condiciones de borde impuestas por el problema
parte d
Para obtener I utilizamos la ecuacion:

$$\frac{dV}{dx} = -IR$$

Con la que obtenemos

$$I(x) = \sqrt{\frac{G}{R}}\frac{V_0}{e^{\sqrt{RG}L} - e^{-\sqrt{RG}L}}(e^{\sqrt{RG}(L-x)} + e^{-\sqrt{RG}(L-x)}) \quad (1{,}5\,pts)$$

Problema 2
Por simetria podemos suponer que $\vec{J}$ no depende de z y que ademas apunta en la direccion $\hat{\theta}$.
Ademas, como estamos en regimen permanente, se cumple que:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Esto nos dice que $\vec{J}$ no depende de θ, por lo tanto.

$$\Rightarrow \vec{J} = J(r)\hat{\theta}$$

Con esto, podemos calcular la diferencia de potencial entre las placas:

$$V_0 = -\int_{-\theta_2}^{\theta_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_0 = -\int_{-\theta_2}^{0} \vec{E}_2 \cdot \hat{\theta} r d\theta - \int_{0}^{\theta_1} \vec{E}_1 \cdot \hat{\theta} r d\theta = -\int_{-\theta_2}^{0} \frac{J_2(r)\hat{\theta}}{g_2} \cdot \hat{\theta} r d\theta - \int_{0}^{\theta_1} \frac{J_1(r)\hat{\theta}}{g_1} \cdot \hat{\theta} r d\theta$$

$$\Rightarrow V_0 = -\frac{J_2(r) r \theta_2}{g_2} - \frac{J_1(r) r \theta_1}{g_1}$$

Pero ademas por condiciones de borde, se cumple que $J_1 = J_2 = J$

$$\Rightarrow V_0 = -\frac{J(r) r \theta_2}{g_2} - \frac{J(r) r \theta_1}{g_1}$$

$$\Rightarrow J(r) = -\frac{1}{r} \frac{V_0}{(\frac{\theta_1}{g_1} + \frac{\theta_2}{g_2})}$$

$$\Rightarrow \vec{J}(r) = -\frac{1}{r} \frac{V_0}{(\frac{\theta_1}{g_1} + \frac{\theta_2}{g_2})} \hat{\theta} \quad (1{,}5 \, pts)$$

Con esto obtenemos el campo electrico en ambas regiones:

$$\vec{E}_1(r) = -\frac{1}{g_1 r} \frac{V_0}{(\frac{\theta_1}{g_1} + \frac{\theta_2}{g_2})} \hat{\theta} \quad (0{,}75 \, pts)$$

$$\vec{E}_2(r) = -\frac{1}{g_2 r} \frac{V_0}{(\frac{\theta_1}{g_1} + \frac{\theta_2}{g_2})} \hat{\theta} \quad (0{,}75 \, pts)$$

Utilizando la condicion de borde para D, obtenemos la densidad de carga superficial

$$\sigma = \frac{1}{r} \frac{V_0}{(\frac{\theta_1}{g_1} + \frac{\theta_2}{g_2})} (\frac{\epsilon_2}{g_2} - \frac{\epsilon_1}{g_1})$$

Con esto podemos observar que no siempre hay densidad de carga superficial. Esta solo existe cuando se da la condicion

$$\frac{\epsilon_2}{g_2} - \frac{\epsilon_1}{g_1} \neq 0 \quad (1{,}5 \, pts)$$

La potencia se calcula como:

$$P = \int_V \vec{J} \cdot E$$

$$P_2 = \frac{V_0^2}{g_2 (\frac{\theta_1}{g_1} + \frac{\theta_2}{g_2})^2} \int_b^a \int_{-\theta_2}^{0} \int_0^h \frac{1}{r^2} r dz d\theta dr$$

$$P_1 = \frac{V_0^2}{g_1 (\frac{\theta_1}{g_1} + \frac{\theta_2}{g_2})^2} \int_b^a \int_{0}^{\theta_1} \int_0^h \frac{1}{r^2} r dz d\theta dr$$

$$P = \frac{V_0^2}{(\frac{\theta_1}{g_1} + \frac{\theta_2}{g_2})} \, h \ln(\frac{a}{b}) \quad (1{,}5 \, pts)$$