fcfm Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

# FI33A ELECTROMAGNETISMO
# Clase 21
# Campos Variables en el Tiempo I

**LUIS S. VARGAS**
**Area de Energía**
**Departamento de Ingeniería Eléctrica**
**Universidad de Chile**

# INDICE

- Repaso
- Flujo magnético
- Ley de Faraday-Lenz
- Modificacion 3ª ecuación de Maxwell
- Principio del generador

# Repaso

Equilibrio electrostático de las cargas $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \dfrac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\,\rho(\vec{r}\,')dv'$ $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

**1ª Ecuación de Maxwell** $\nabla \bullet \vec{D} = \rho$

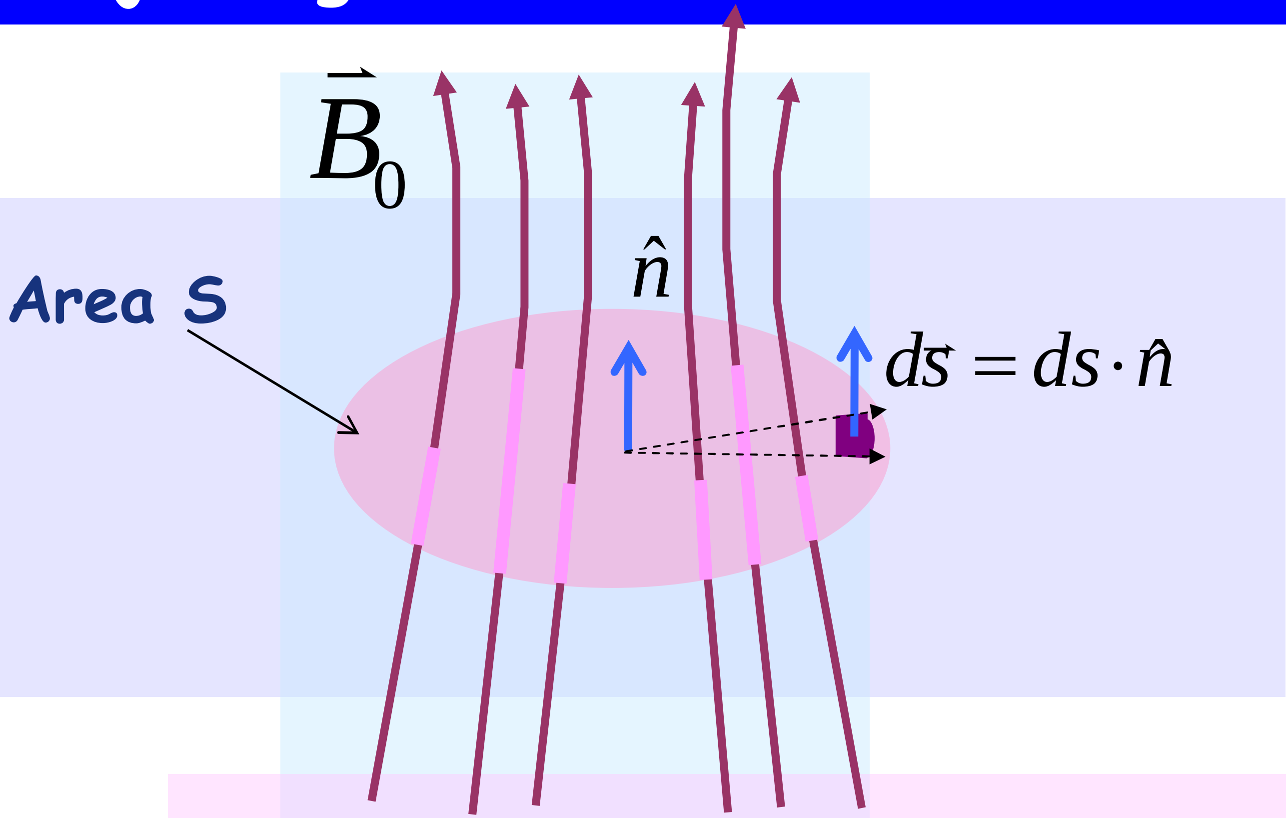
**2ª Ecuación de Maxwell** $\nabla \times \vec{E} = 0$

Equilibrio dinámico de las corrientes $\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \dfrac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}$ $\vec{B} = \mu_R\mu_0\vec{H}$

**3ª Ecuación de Maxwell** $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

**4ª Ecuación de Maxwell** $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

# Flujo magnético

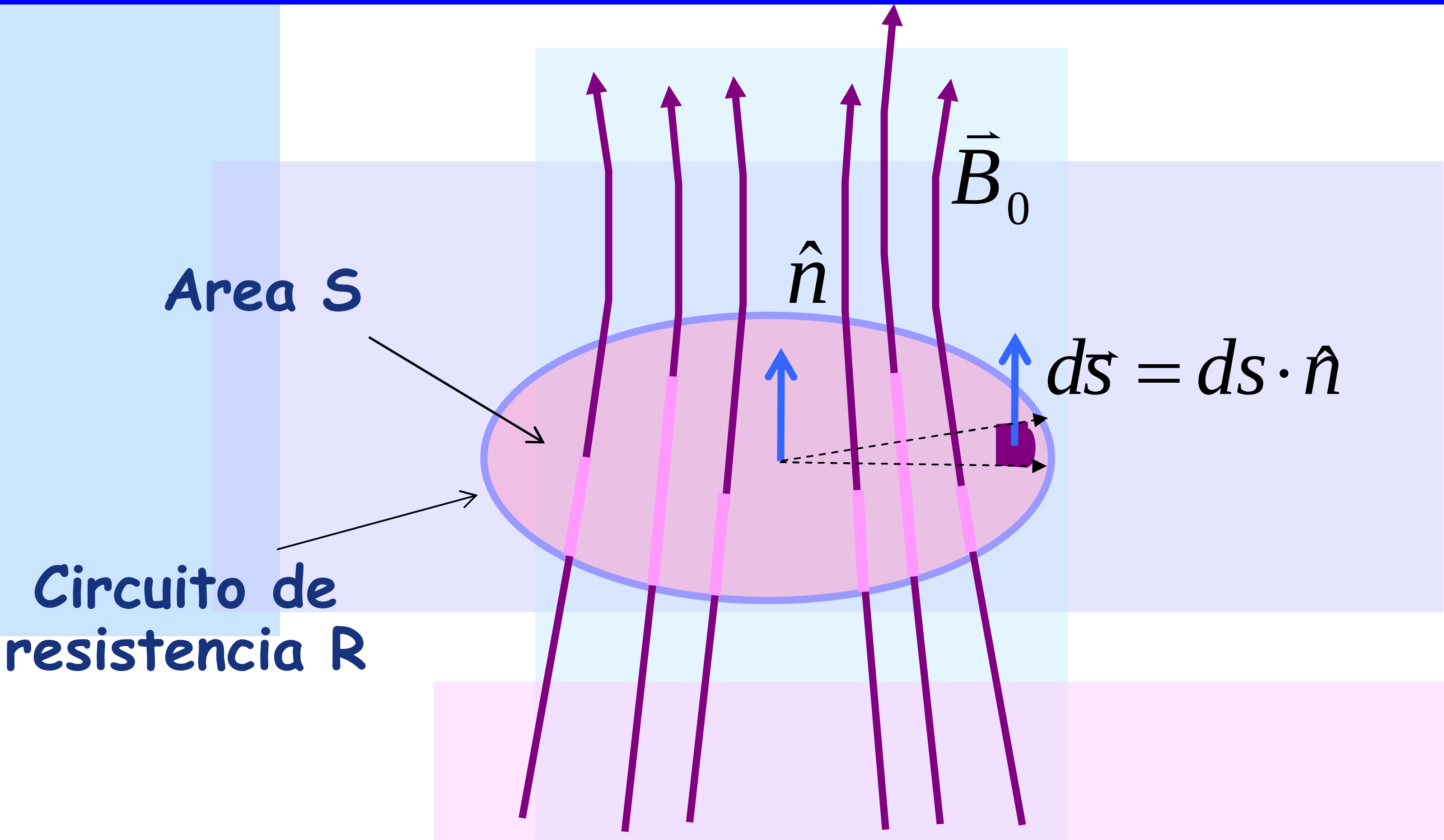



**Flujo del campo magnético a través de área S**

$$\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$$

$$[\phi] = [Tesla \times m^2]$$

# Flujo magnético en un circuito

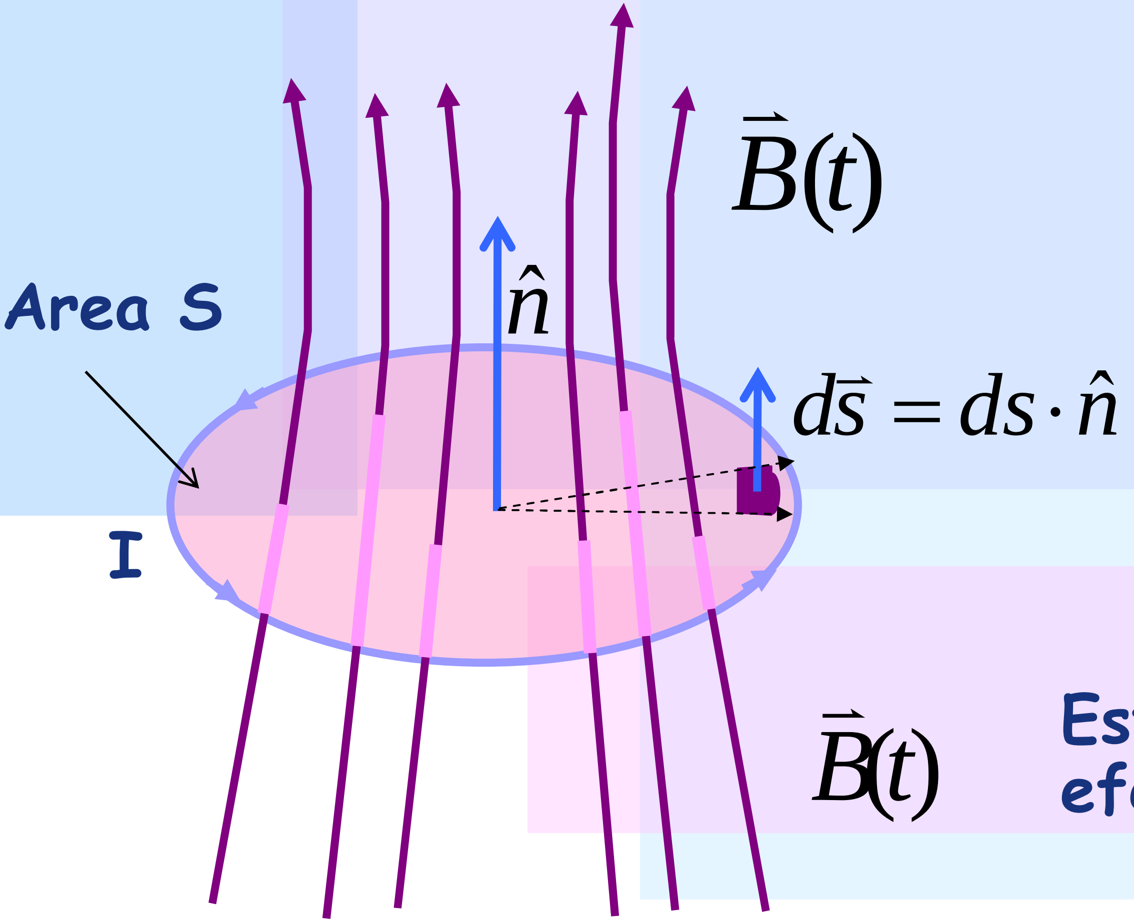



Flujo del campo magnético a través del circuito $\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$

# Ley de Faraday-Lenz

Se encuentra experimentalmente que si $\vec{B} = \vec{B}(t)$ entonces aparece una corriente I dada por la relación

$$I = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{1}{R}$$



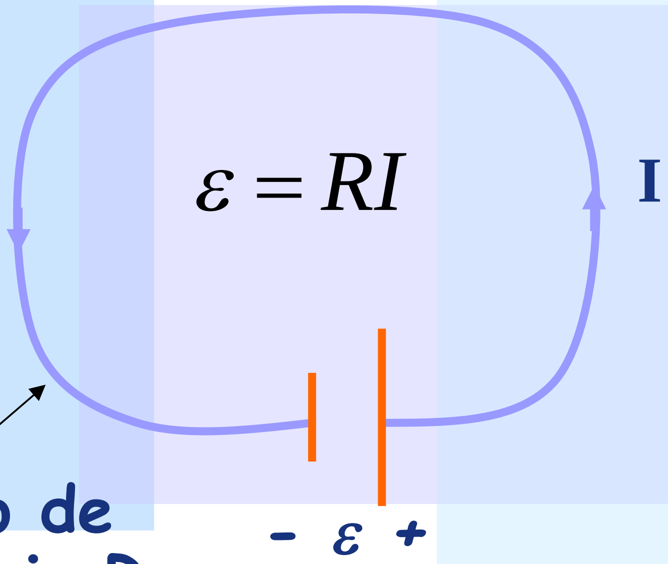

donde

$$\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$$

$\vec{B}(t)$ Este campo incluye el efecto de la corriente I

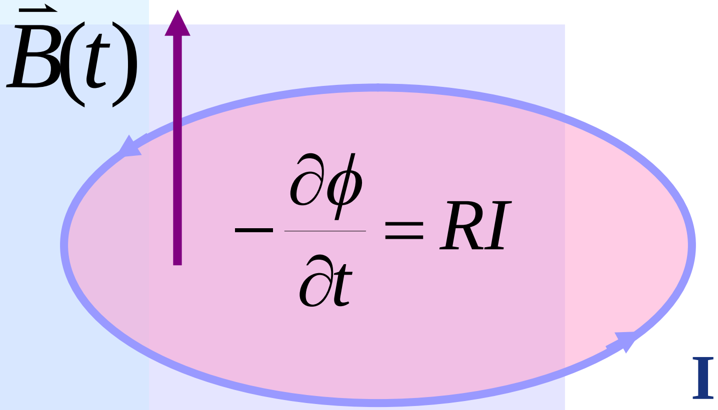
# Ley de Faraday-Lenz

Recordemos que para un circuito resistivo se cumple $\varepsilon = RI$




Circuito de resistencia R

Fem del circuito



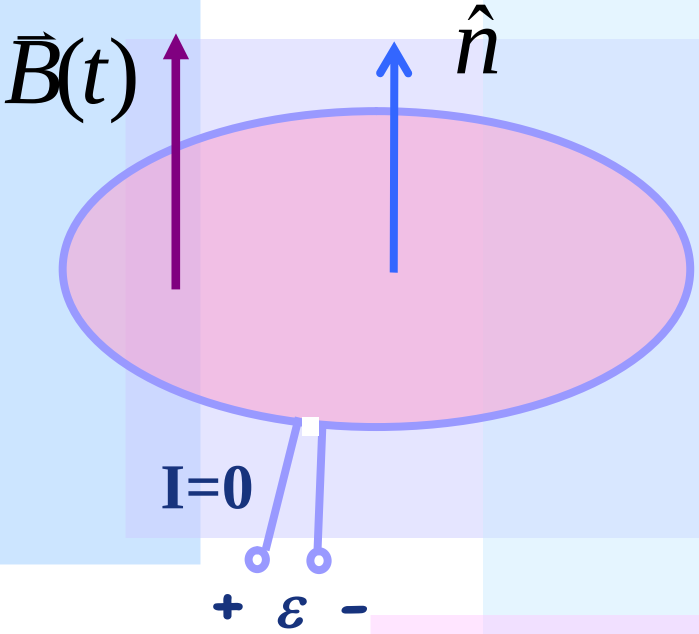

Un campo magnético variable genera o induce un FEM dada por la expresión

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

**LEY DE FARADAY-LENZ**

# Ley de Faraday-Lenz

Un campo magnético variable genera o induce un FEM



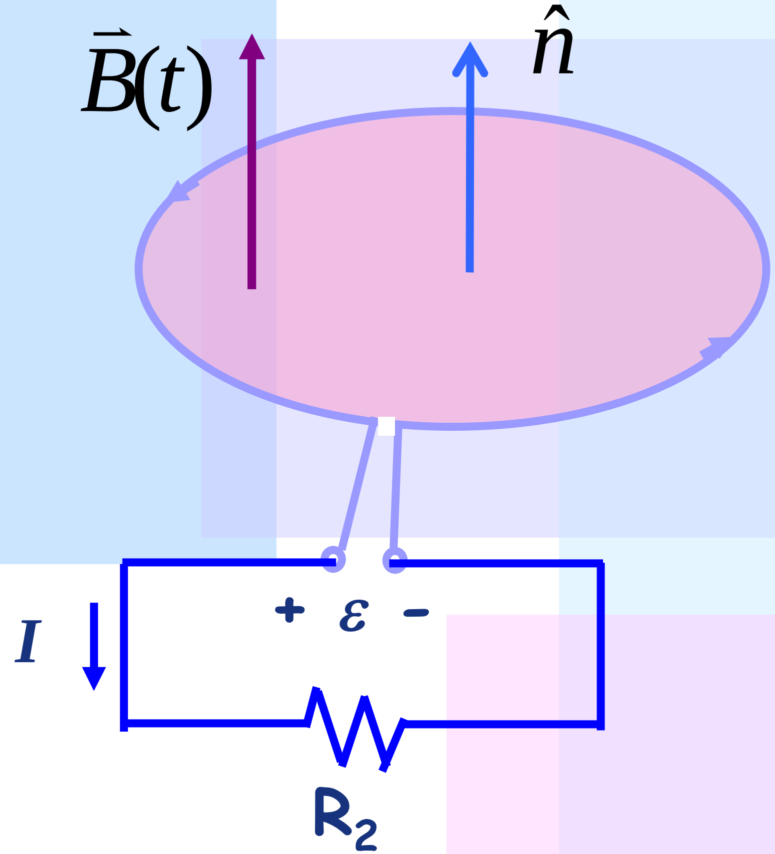

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$

Notar que si el flujo es variable en el tiempo la fem se induce independiente de la corriente I

# Ley de Faraday-Lenz

## Un campo magnético variable genera o induce un FEM

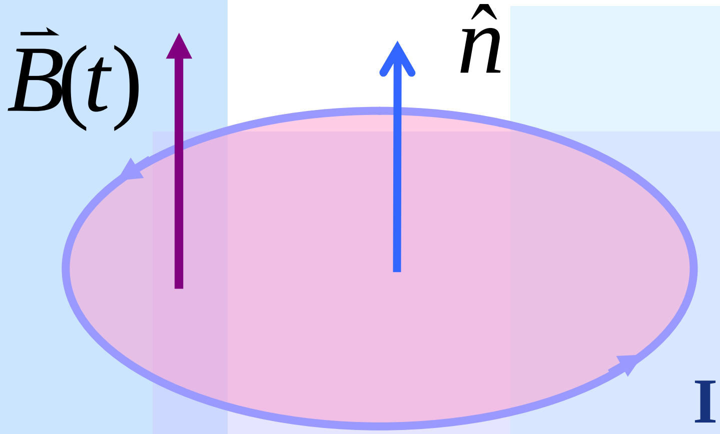



$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$

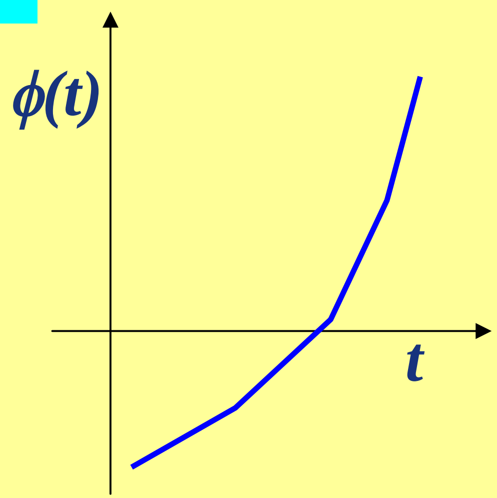
$$\varepsilon = R_2 I \Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{R_2}$$

# Ley de Faraday-Lenz

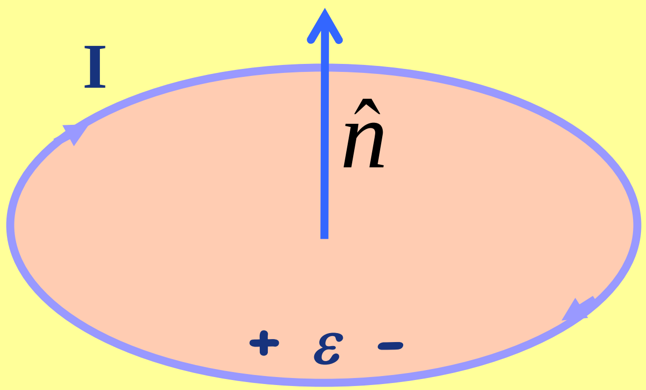



$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$ **con** $$\phi = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$$

**Si**



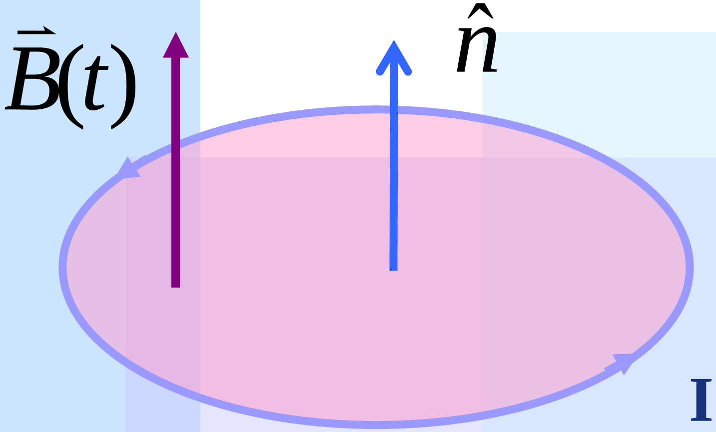

$$\dot{\phi} > 0 \Rightarrow \varepsilon < 0$$




$\vec{B}$ **crece** $\Rightarrow$ **Corriente genera campo opuesto al crecimiento**

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

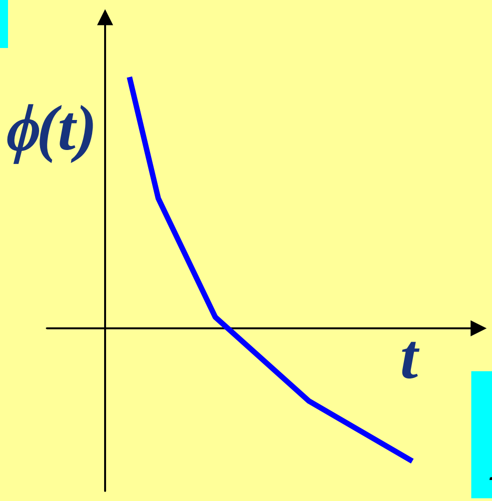
# Ley de Faraday-Lenz



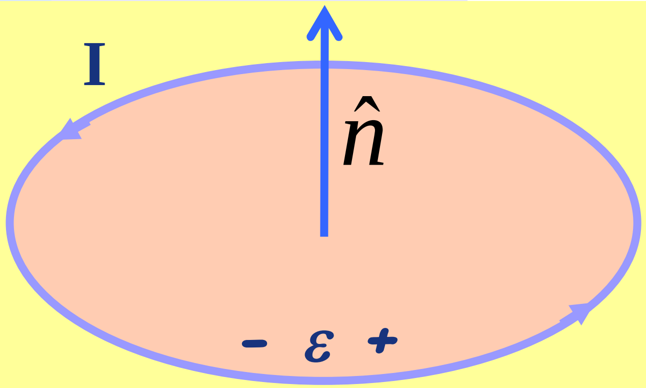

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$

Si




$$\dot{\phi} < 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$$

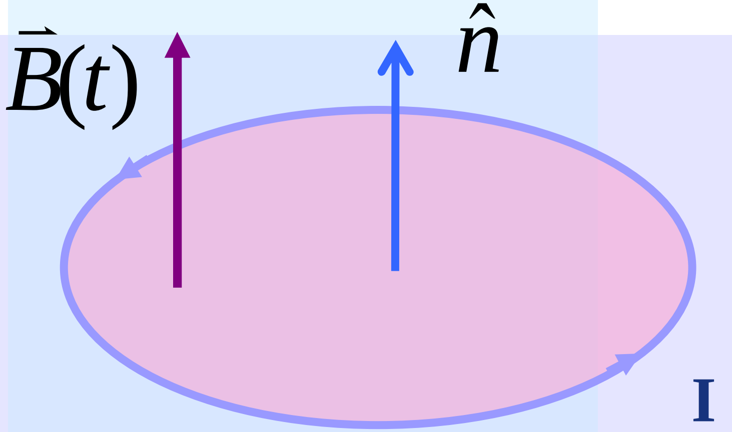



$\vec{B}$ decrece $\Rightarrow$ Corriente genera campo opuesto al decrecimiento

# Ley de Faraday-Lenz

Un flujo magnético variable genera o induce un FEM

$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$$




$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Notar que un flujo variable en el tiempo se puede lograr de dos formas:

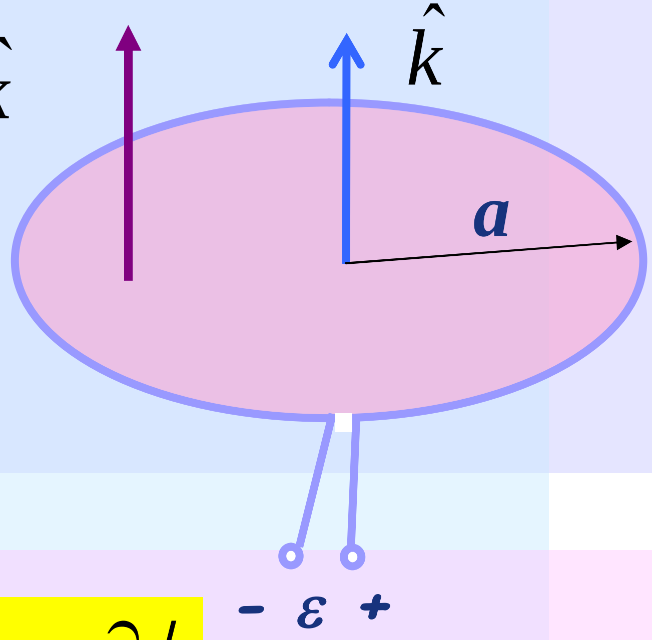
- Con un campo variable *B(t)*
- Con una superficie variable *S(t)*

# Ejemplo 1

## Flujo variable producido por un campo variable *B(t)*

**Si** $\vec{B}(t) = B_0 e^{-t/\tau}\hat{k}$

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$




$$\phi(t) = B_0 e^{-t/\tau} \pi a^2$$

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\pi a^2 B_0}{\tau} t e^{-t/\tau}$$

# Ejemplo 2

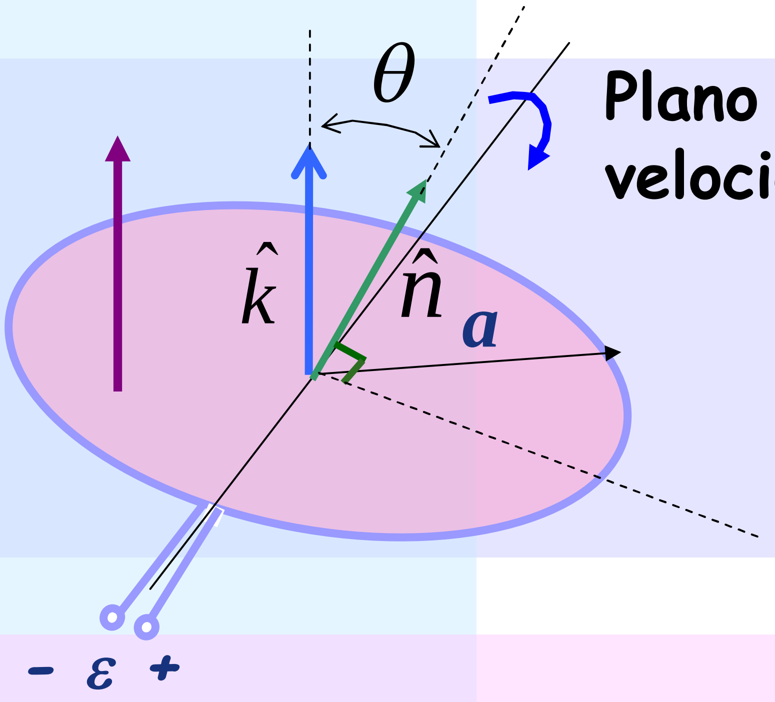
## Area variable en el tiempo produce *B(t)*

**Si** $\vec{B}(t) = B_0\hat{k}$

$$\phi = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$\phi(t) = B_0 A\cos\theta$$

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

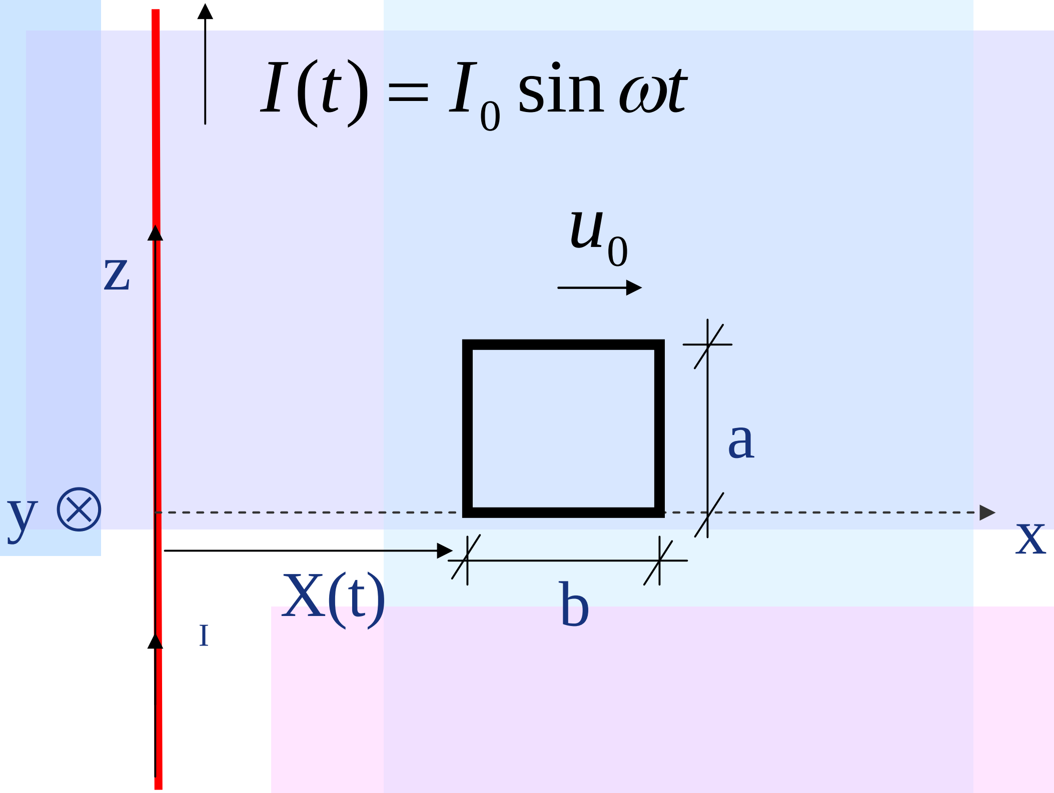



**Plano gira a velocidad $\omega$**

$$\varepsilon = -\frac{\partial\phi}{\partial t} \;\Rightarrow\; \varepsilon(t) = AB_0\omega\sin(\omega t + \theta_0)$$

# Ejemplo 3

## Area variable en el tiempo y campo variable $B(t)$

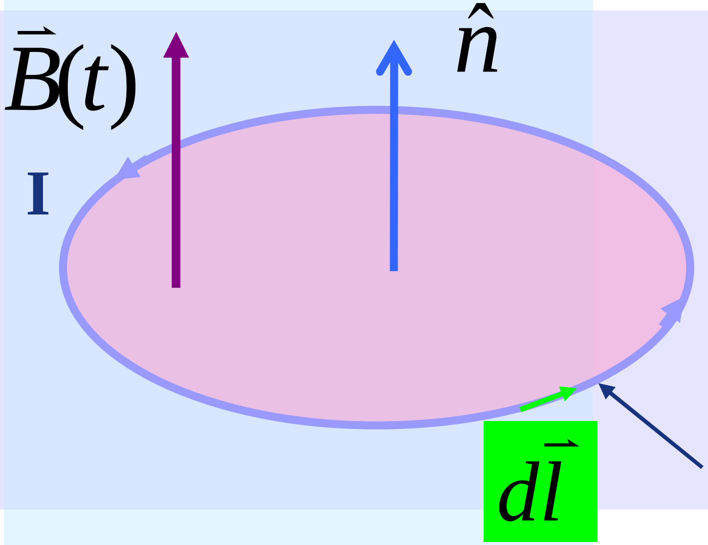



**Calcular la fem inducida en el circuito cuadrado si se mueve con velocidad $u_0$ constante**

# Modificación 2ª Ecuación de Maxwell

## Un campo magnético variable genera o induce una FEM

$$\phi = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$$



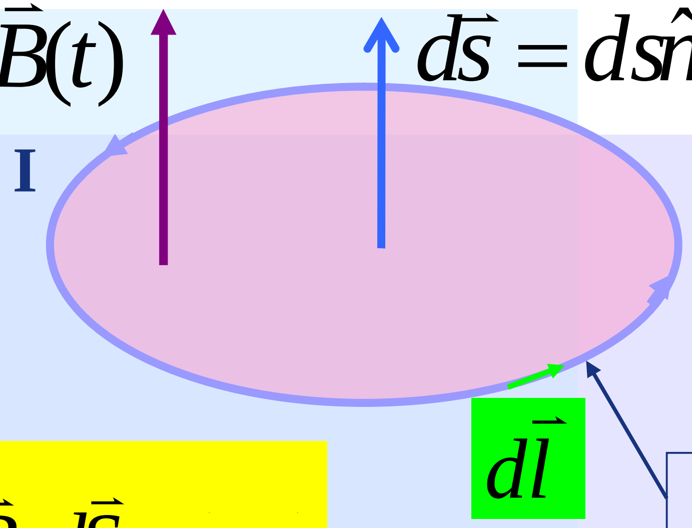

$$\varepsilon = \int_{(c)} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \int_{(c)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \Rightarrow \iint_S \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \quad (7.9)$$

# Modificación 2ª Ecuación de Maxwell

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$




$$\vec{B}(t) \qquad d\vec{s} = ds\hat{n}$$

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\varepsilon = \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

**2ª Ecuación de Maxwell**

# Modificación 2ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

**2ª Ecuación de Maxwell**

**Dado que** $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{A}\right) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

**usando** $\nabla \times \left(\nabla V\right) = 0$

# Modificación 2ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

**2ª Ecuación de Maxwell**

$$\Rightarrow \nabla \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

**usando** $\nabla \times (\nabla V) = 0$

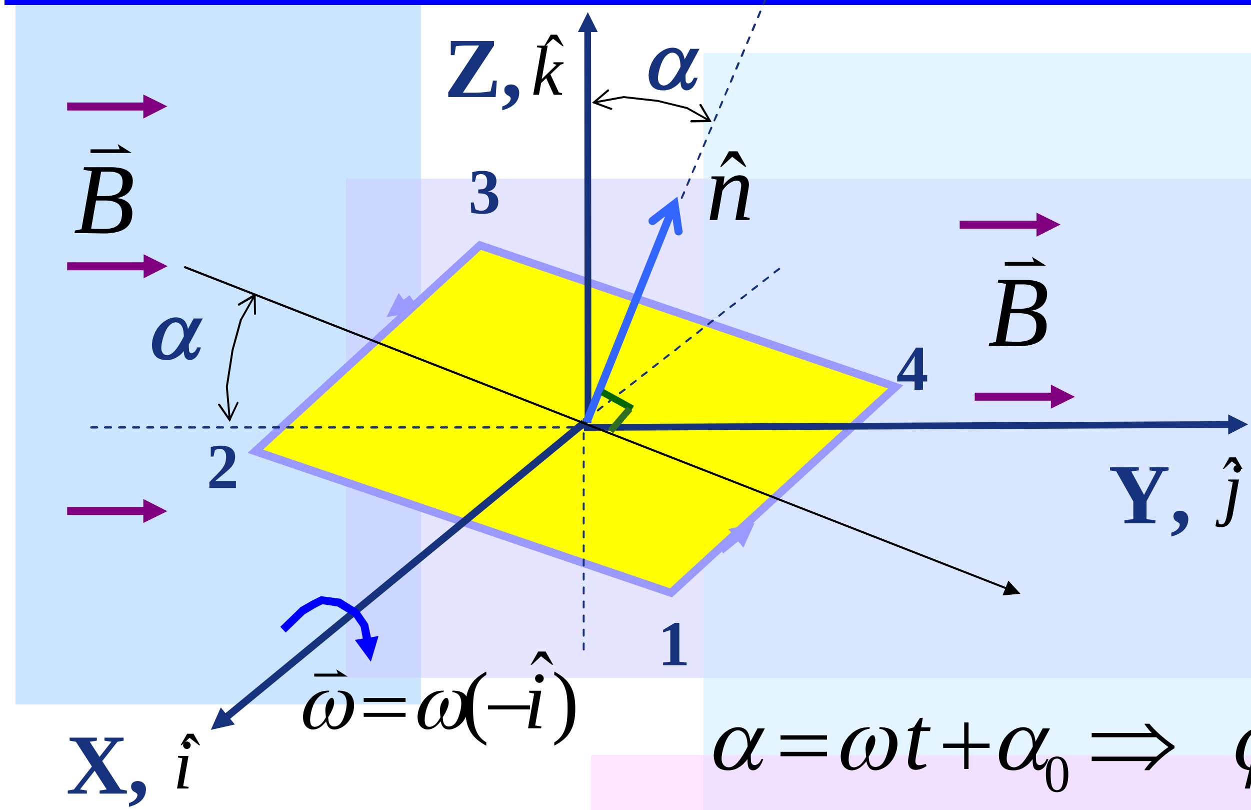
$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\vec{E} = \overbrace{-\nabla V}^{\text{Origen electrostático}} - \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{Debido a campo magnético variable en el tiempo}}$$

***Origen electrostático***

***Debido a campo magnético variable en el tiempo***

# Principio del generador




$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

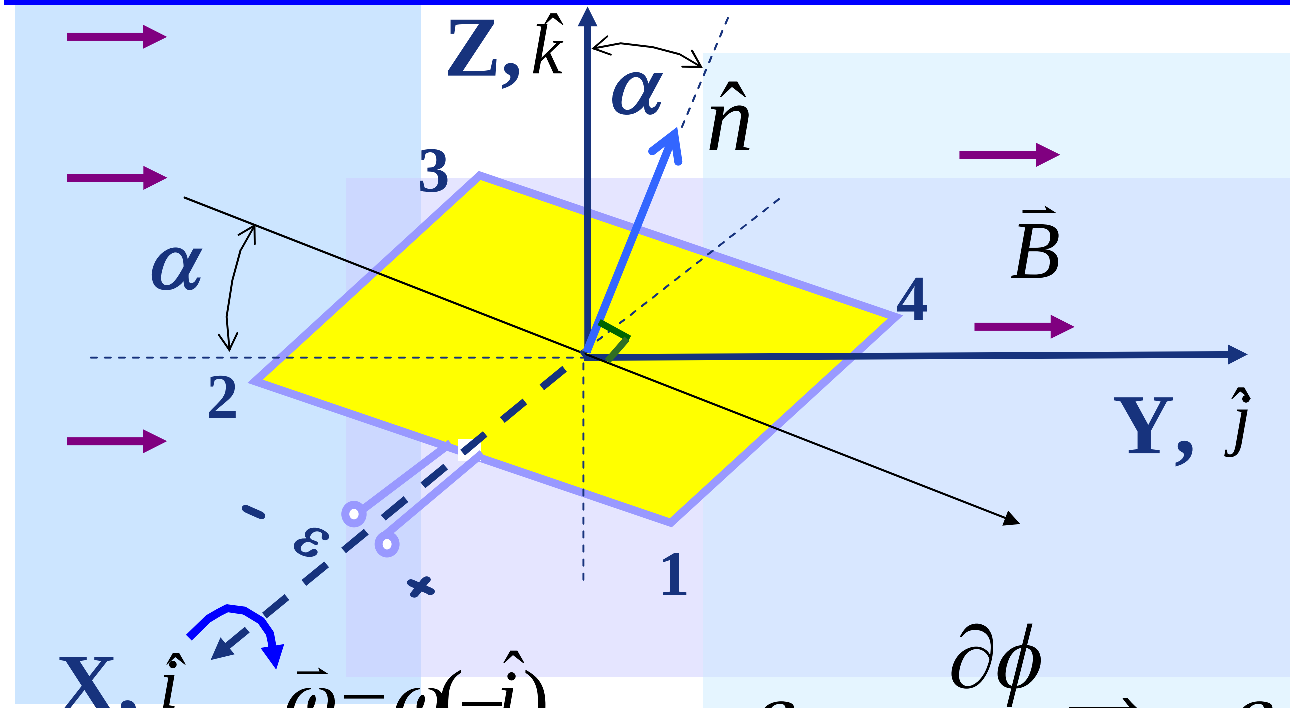
$$\phi = BA \sin\alpha$$

$$\alpha = \omega t + \alpha_0 \Rightarrow \quad \phi = BA \sin(\omega t + \alpha_0)$$

**Ley de Faraday-Lenz**

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \quad \varepsilon = B\omega \cos(\omega t + \alpha_0)$$

# Principio del generador

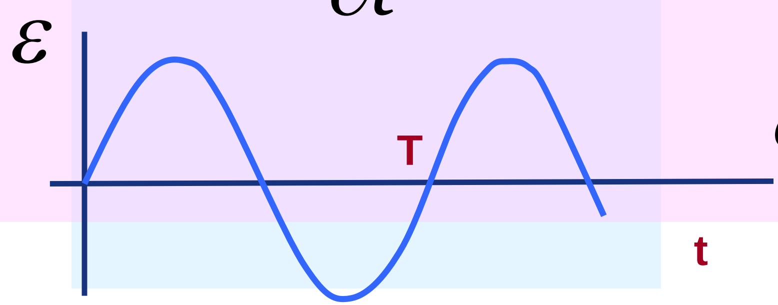



$$\vec{\omega} = \omega(-\hat{i})$$

$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

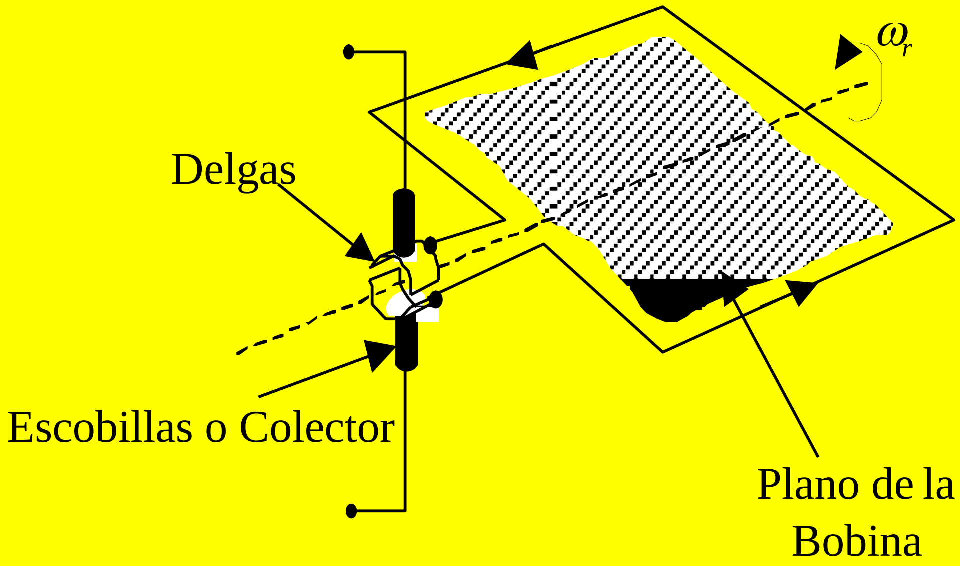
$$\phi = B \sin\alpha$$

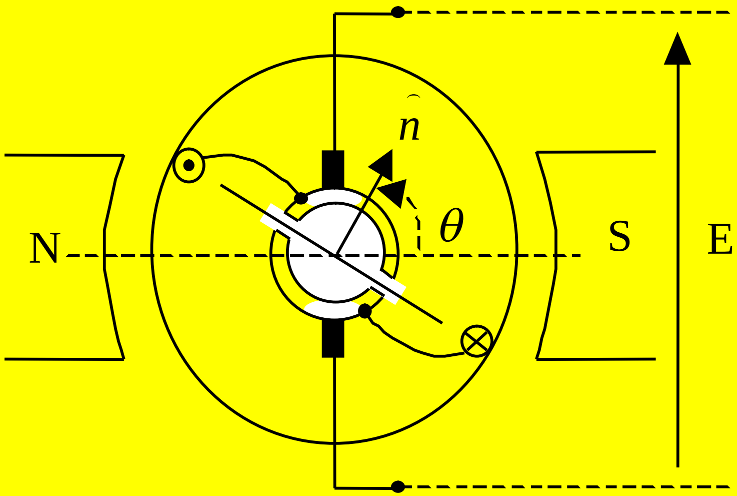
$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \quad \varepsilon = B\omega \cos(\omega t + \alpha_0)$$



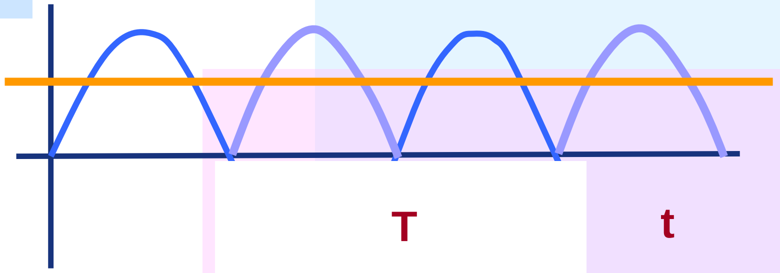

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow T = \frac{1}{f}$$

# Principio del generador de Corriente Continua



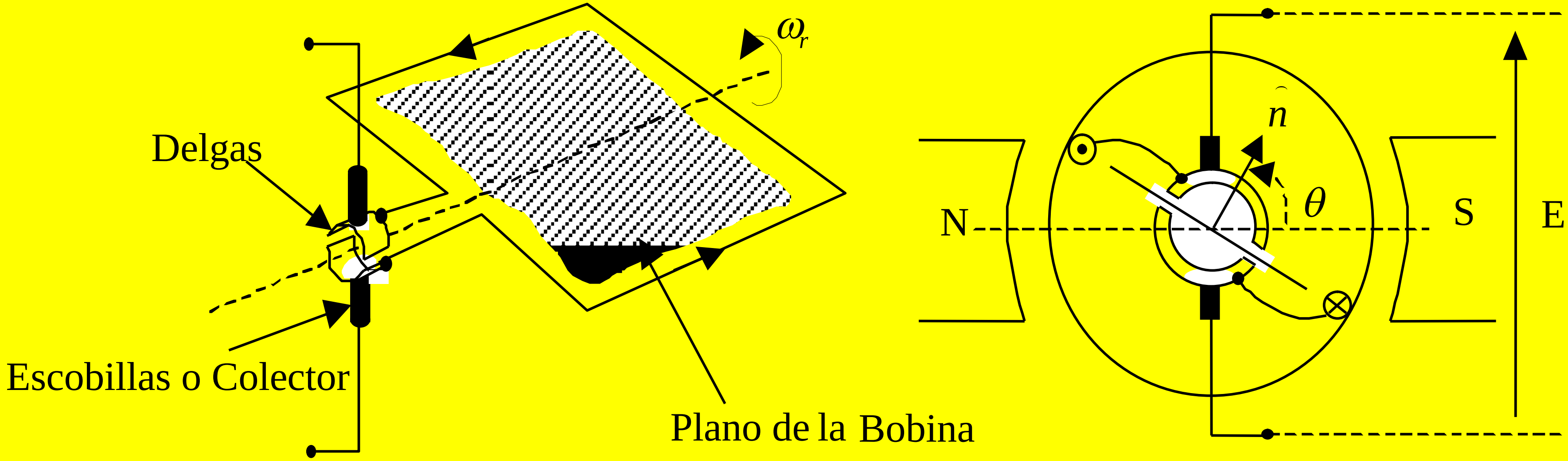



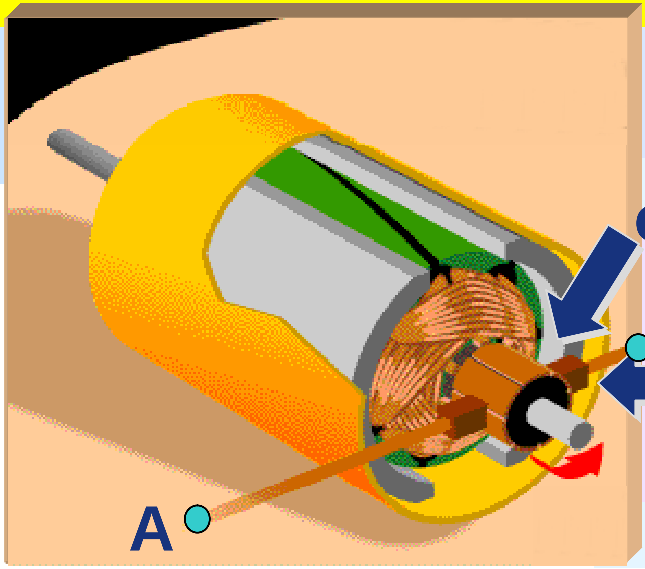

**Valor medio no nulo**

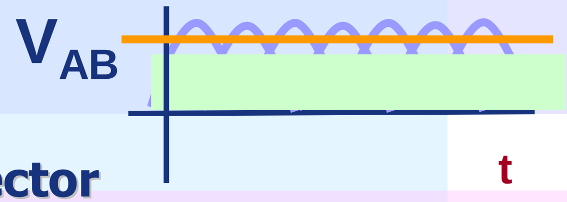



$$\omega = 2\pi f \Rightarrow T = \frac{1}{f}$$

# Generador de Corriente Continua




Colector

Escobillas

Colector real