Resolución Auxiliar N° 11

Prof. Auxiliar: Felipe L. Benavides

Fecha: Miércoles 04 de Junio de 2008

Problema 1

a) Por ley de Ampère sabemos que el campo magnético del alambre, está definido por la expresión

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

Al calcular las fuerzas, se plantea

$$\vec{F} = I \int_{\Gamma} d\vec{r} \times \vec{B}$$

donde I es la corriente que circula por el circuito afectado, (el opuesto a quien produce el campo), y el diferencial $d\vec{r}$ recorre el segmento a considerar en la curva Γ . Así, para los segmentos curvos la integral es nula, puesto que tanto el diferencial de camino como el campo magnético apuntan en direcciones paralelas. Para los segmentos rectos la fuerza es no nula. Para el de la derecha, (según la figura),

$$\vec{F}_1 = I_2 \int_a^b d\rho \hat{\rho} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \hat{\theta} = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{k}$$

Para el de la izquierda, (tb. según la figura), y concluyendo después para la fuerza total,

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= I_2 \int_a^b d\rho(-\hat{\rho}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \hat{\theta} = -\frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{k} \\ \therefore \vec{F}_T &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0. \end{aligned}$$

b) Es ciertamente probable que exista un torque no nulo sobre el sistema, pues, si bien la fuerza total *es* nula, cada componente de la fuerza está aplicada en distintas posiciones del sistema. Si se considera el eje de éste como el punto en el plano xy del circuito 2 que intersecta el alambre en la figura, aparece una fuerza en $\hat{k}$ a la derecha, y en $-\hat{k}$ a la izquierda, lo que produce torque.

c) El torque viene dado por la expresión

$$T = I \int_{\Gamma} \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B})$$

Donde nuevamente la corriente I es aquella del circuito afectado por el campo $\vec{B}$, $d\vec{r}$ es el segmento diferencial que recorre el camino del circuito, y $\vec{r}$ es el brazo de torque.

Para los segmentos rectos de la derecha e izquierda, según la figura, ((1) y (2))

$$\begin{aligned} T_1 &= I_2 \int_a^b \rho \hat{\rho} \times \left(d\rho \hat{\rho} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \hat{\theta} \right) = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} (b-a)(-\hat{\theta}) \\ T_2 &= I_2 \int_a^b \rho \hat{\rho} \times \left((-d\rho \hat{\rho}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \hat{\theta} \right) = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} (b-a)(\hat{\theta}) \\ \therefore T_{total} &= T_1 + T_2 = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} (b-a)(-\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2) \end{aligned}$$

En términos de los vectores cartesianos,

$$\begin{aligned} T_{total} &= T_1 + T_2 = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} (b-a) \left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \hat{i} - \text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \hat{j} - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \hat{i} + \text{cos}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \hat{j} \right) \\ &= -\frac{I_1 I_2 \mu_0}{\pi} (b-a) \text{sen}(\alpha) \hat{j} \end{aligned}$$

Nota: La fórmula que expresa el torque sobre un circuito dado el dipolo magnético asociado a la geometría y un campo magnético externo, exige que dicho campo magnético *sea constante*. La expresión,

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

puede deducirse, de la fórmula general aquí planteada asumiendo que $\vec{B}$ es constante, lo que queda propuesto. En el problema aquí planteado no era posible utilizarlo, (por razones obvias), y por ello se recurrió a la fórmula general.

Problema 2

Todo circuito, de hecho, todo material donde exista un flujo de corriente, tiene asociado un *momento dipolo magnético*, de la forma:

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int_{\Gamma} \vec{r}' \times d\vec{r}' = IS\hat{n}$$

donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie definida por el circuito, y S el área de ella. Supongamos que la espira está contenida en el plano XY , de modo que su normal apunta en el eje Z . El momento dipolo magnético queda:

$$\vec{m} = \frac{I\sqrt{3}a^2}{4} \hat{k}$$

El potencial vectorial $\vec{A}$, para el caso *lejano*, es, en el caso general:

$$\vec{A}_{dipolo} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Donde $\vec{r}'$ indica la posición del centro del dipolo. Por comodidad, centramos el origen allí. Al parametrizar, notamos que la expresión anterior está descrita en coordenadas esféricas, por lo que se debe proyectar los vectores del sistema inicial en ésta nueva base.

$$\hat{k} = \text{cos}\theta \hat{r} - \text{sen}\theta \hat{\theta} \Rightarrow$$

$$\vec{A}_{dipolo} = \frac{\mu_0 I \sqrt{3} a^2}{16\pi r^2} \left(\text{cos}(\theta) \hat{r} - \text{sen}(\theta) \hat{\theta} \right) \times \hat{r} = \frac{\mu_0 I \sqrt{3} a^2}{16\pi r^2} \text{sen}(\theta) \hat{\phi}$$

Finalmente, el campo magnético vale:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \text{sen}(\theta)} \det \left(\begin{bmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\text{sen}(\theta)\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & r\text{sen}(\theta)A_{\phi} \end{bmatrix} \right) = \frac{\mu_0 I \sqrt{3} a^2}{16\pi r^3} \left(2\text{cos}(\theta) \hat{r} + \text{sen}(\theta) \hat{\theta} \right)$$

Notamos aquí que el cálculo no era necesario siquiera, y fue realizado únicamente pues se pedía explícitamente. Habiendo planteado el momento dipolo magnético, la expresión *general* para el campo en la aproximación dipolo magnético queda,

$$\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left(2\text{cos}(\theta) \hat{r} + \text{sen}(\theta) \hat{\theta} \right)$$

y ella soluciona el problema. A partir de ésta expresión pueden pedirse un sinnúmero de cosas, modelando las más diversas situaciones. Calcular torques sobre otros circuitos, fuerzas, etc., (por definición, despejando quizás las corrientes con ley de ampere, etc.), e incluso despejar, (inversamente), campos de ésta forma, que produzcan torques o que generen ciertos movimientos en un sistema, reconociendo geometrías y/o corrientes posibles para el circuito generador, y revisando los efectos sobre él dado el circuito en movimiento, por ejemplo (todo sometido por supuesto a las diversas características de las situaciones en cuestión).

La comparación de resultados, (aproximación versus resultado preciso), es sencilla. Basta centrar el triángulo equilátero en el origen, y calcular el campo magnético generado por un cable de largo fijo. Luego, por superposición, y en forma cuidadosa, usar éste resultado en cada arista del triángulo, (teniendo especial precaución con los vectores, su dirección, y el sistema de referencia en el que se encuentran descritos), y finalmente concluir.

Problema 3

a)

i. Si se desprecian el efecto de borde, (i.e., se aproxima el campo dentro de la bobina por el de una muy larga), el campo magnético $\vec{H}$ es, (por Ley de ampère, usando que el campo magnético fuera de la bobina es nulo. Ppto.: Demostrarlo!),

$$\vec{H} = nI\hat{k}$$

Donde $\hat{k}$ es un vector unitario a lo largo del eje del solenoide, y n es el número de vueltas del enrollado, por unidad de longitud. La magnitud del campo es finalmente,

$$\vec{H} = \left(2.4 \cdot 10^4 \left[\frac{A}{m}\right]\right) \hat{k}$$

ii. La magnetización $\vec{M}$ está dada por:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m nI\hat{k} = \left(6.96 \left[\frac{A}{m}\right]\right) \hat{k}$$

iii. La magnitud de $\vec{B}$ es $\mu_r \mu_0$ veces la magnitud de $\vec{H}$. Aquí, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ y $\mu_r = 1 + \chi_m = 1.00029$. Utilizando el resultado de i., queda,

$$|\vec{B}| = 3.0168 \cdot 10^{-2} [T].$$

Si el solenoide estuviera vacío,

$$|\vec{B}| = \mu_0 |\vec{H}| = 3.0159 \cdot 10^{-2} [T]$$

iv. Si se sustituyese según el enunciado,

$$|\vec{B}| = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 2.4 \cdot 10^4 \simeq 15 [T].$$

b) Igual que en a), el campo $\vec{H}$ al interior del solenoide queda

$$\vec{H} = NI\hat{k}$$

Con I la corriente que circula por el solenoide, y N , el número de vueltas por unidad de longitud del enrollado. Como en el interior se ha puesto un núcleo de hierro dulce, la magnetización es

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

(Como la curva de histéresis del hierro dulce es muy delgada, se suele asumir un comportamiento lineal entre $\vec{M}$ y $\vec{H}$ para éste tipo de material ferromagnético, al menos en un tramo suficientemente grande). Finalmente

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{M} + \vec{H}) = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 \mu_r NI\hat{k} = \mu_0 1200 \cdot 2000 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \sim (0.06 [T]) \hat{k}$$

Para un solenoide vacío,

$$\vec{B} = \mu_0 NI\hat{k}$$

Para producir 0.06 [T], se necesita entonces una corriente de

$$I = \frac{0.06}{\mu_0 N} \sim 23.9 [A]$$

c)

i. Éste es un caso muy sencillo. En general se tiene que:

$$\begin{cases} \vec{J} = \nabla \times \vec{M} & (1) \\ \vec{K} = \vec{M} \times \hat{n} & (2) \end{cases}$$

Donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie. Vemos que la expresión (1) resulta nula, en cambio la (2),

$$\vec{K} = \vec{M} \times \hat{n} = (aR^2 \text{sen}^2(\theta) \cos^2(\phi) + b) (\text{sen}(\theta)\hat{k} - \cos(\theta)\hat{j})$$

Usando coordenadas esféricas, en que

$$x = R \text{sen}(\theta) \cos(\phi),$$

$$\hat{n} = \hat{r} \text{ y } \hat{r} = \cos\theta\hat{k} + \text{sen}\theta(\cos\phi\hat{i} + \text{sen}\phi\hat{j}).$$

ii. Basta plantear la integral del potencial magnético vector en términos de lo recién calculado y resolver, suponiendo que el denominador puede salir de ella. De ahí, calculando el rotor de $\vec{A}$ se obtendrá el campo magnético $\vec{B}$.