

Pauta P3 C2

Prof. Auxiliar: Felipe L. Benavides

Fecha: Sábado 31 de Mayo de 2008

a) Según la Ley de Biot - Savarat,

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

Donde el diferencial de fuerza está dado sobre un segmento $d\vec{l}$ de un circuito con corriente I , tal que se encuentra en una posición donde existe un campo magnético $\vec{B}$. Notando el cable superior según la figura del enunciado como 1, y el inferior como 2, (situando ambos alambres en el mismo plano y por conveniencia el alambre 2 sobre el eje $\hat{i}$), y calculando, se obtiene:

$$d\vec{F} = I_1 dx \hat{i} \times \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Parametrizando,

$$\begin{cases} d\vec{l}' = dx' \hat{i} \\ \vec{r} = x \hat{i} + a \hat{j} \\ \vec{r}' = x' \hat{i} \end{cases}$$

Así,

$$d\vec{F} = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{4\pi} \int_{Cable\ 2} \frac{dx \hat{i} \times [dx' \hat{i} \times (x \hat{i} + a \hat{j} - x' \hat{i})]}{[(x - x')^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Como los cables tienen un largo definido, positivo, I_1, I_2, μ_0 y a son constantes positivas, el integrando, y con ello la integral, es positiva salvo el signo de la dirección, en $-\hat{j}$. En efecto, (denominando $d\vec{N}$ al integrando)

$$\begin{aligned} d\vec{N} &= \frac{dx \hat{i} \times [dx' \hat{i} \times (x \hat{i} + a \hat{j} - x' \hat{i})]}{[(x - x')^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx dx' a}{[(x - x')^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} (-\hat{j}) \\ \therefore d\vec{F} &= C (-\hat{j}) \end{aligned}$$

Con C una constante cualquiera, determinada por los datos del problema. Vemos que la fuerza es atractiva para el cable 1 respecto del 2. Es posible realizar el mismo procedimiento para probar el caso contrario en el cable 2, pero es innecesario, puesto que las fuerzas son iguales y opuestas.

Notas

(1) El circuito asociado a cada cable es, aparentemente, abierto, lo que podría generar contradicciones. Si se coloca un extremo del cable a potencial V no nulo, y el otro a tierra, es posible generar, con un conductor que no genera una curva cerrada, un flujo de corriente. Eso sí, dicha corriente se disipa en la tierra (modelada como un conductor perfecto infinito). Dado el trabajo que genera la fuente, vuelve a entrar flujo de corriente al cable, y ésto “cierra” el circuito. En realidad el circuito está cerrado, (las tierras por un lado y la conexión de una fuente de potencial al cable por el otro), sólo que se desprecian los efectos producidos por la fuente que alimenta el cable, (y las corrientes en tierra, aunque ésta al menos es una muy buena aproximación). Por ello, el campo magnético sólo se asume producido por el cable conductor.

(2) Hay muchas formas de demostrar éste problema. La descripción aquí es extensa, pero existen formas más breves. Basta notar las direcciones de las corrientes, y según ellas, las fuerzas producidas por los campos magnéticos y sus interacciones, dada la regla de la mano derecha. El ptje. es: 1.3 ptos. por expresar el campo magnético dada la corriente de uno de los cables, 1.3 ptos. por expresar la fuerza sobre el otro cable, dada su corriente y el campo magnético anterior, y 0.4 ptos. por concluir, agregando, (sólo enunciando), que no es necesario calcular para cada cable sobre el otro, pues se cumple, al menos aquí, que las fuerzas son iguales y opuestas, por la geometría. Errores conceptuales descuentan 0.5 en caso leve, 1.0 a 1.5 en caso grave, c/u. Asumir que la extensión de los cables es infinita no es necesario, y si se realiza, se considera la mitad del puntaje tanto en el campo como en la fuerza obtenida.

b) Hay dos formas directas de resolver ésta sección. Nuevamente planteando Biot Savarat,

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

Luego debe obtenerse el valor del campo $\vec{B}$ en la posición de cualquiera de los cables, y reemplazar la corriente y el diferencial de posición según corresponda. Por ley de Ampère, considerando cables de extensión infinita,

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

Así,

$$d\vec{F} = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi a} dx \hat{j}$$

Es la fuerza sobre un segmento diferencial del cable 2, dada su corriente y el campo magnético generado por el cable 1. ($\hat{\theta}$ coincide con $-\hat{k}$, por lo que el producto cruz resulta $\hat{j}$). El campo magnético también puede calcularse según se planteó en a), asumiendo límites infinitos en la integral, y resolviendo una parte de ella. (Un diferencial queda libre, para el caso que corresponda según se desee).

Notas

(1) El planteo de la expresión de fuerzas con una correcta parametrización vale 1.5 ptos. El cálculo de $\vec{B}$ otorga 1.0 pto., y concluir adecuadamente, 0.5 ptos.