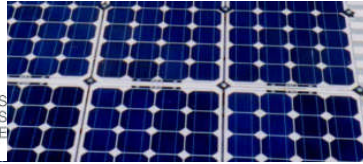




fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



FI33A ELECTROMAGNETISMO

Clase 19

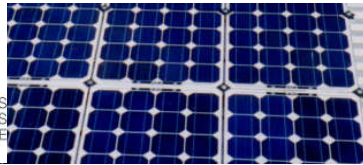
Magnetostática-V

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



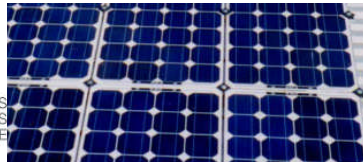
fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



INDICE

- Modelo atómico de los materiales
- Corrientes de Magnetización
- Permeabilidad Magnética
- Clasificación de materiales magnéticos
- Ciclo de histéresis



Potencial Magnético Vector

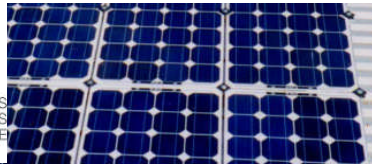
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K} ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

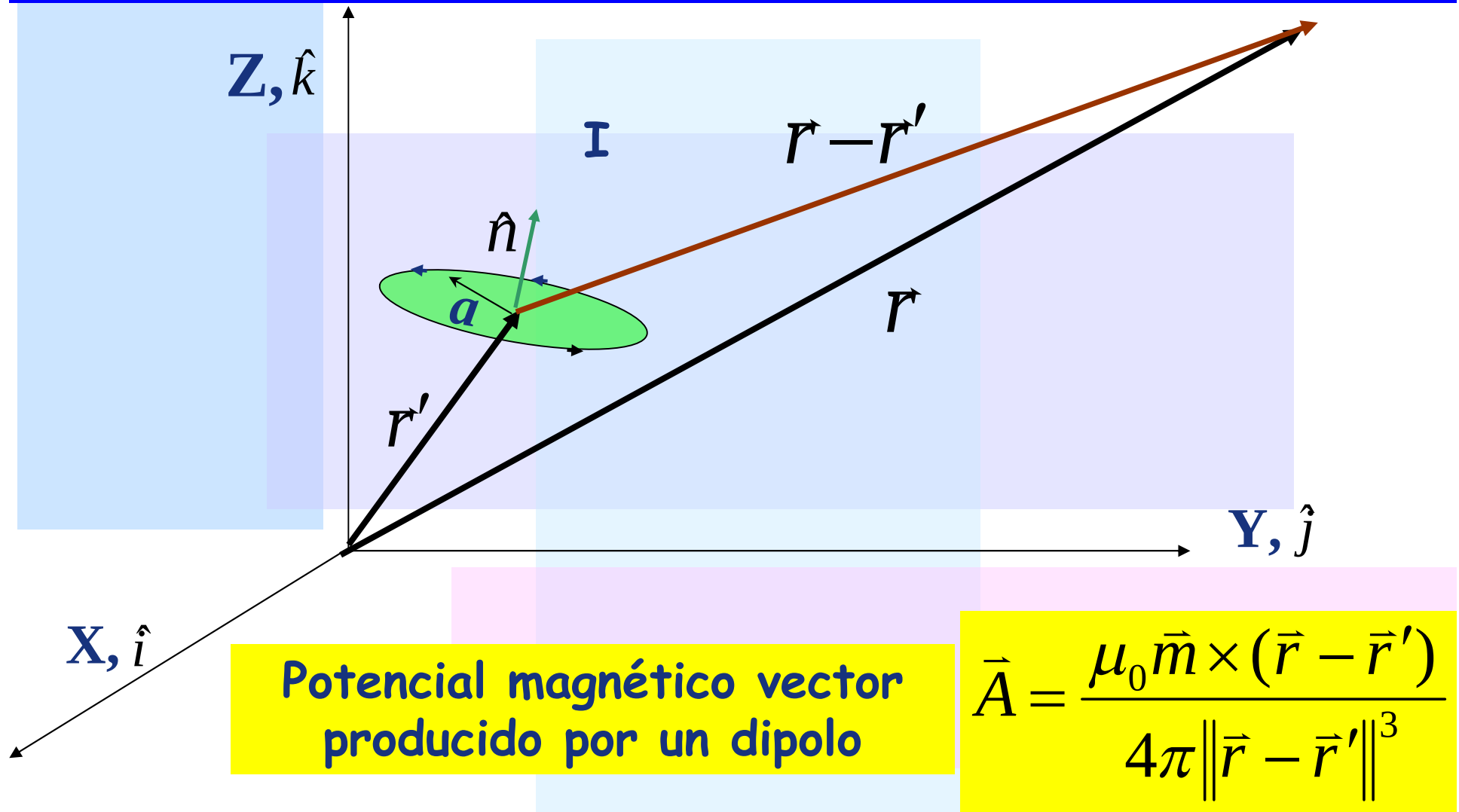
Para corrientes superficiales $[\vec{K}] = \frac{A}{m}$

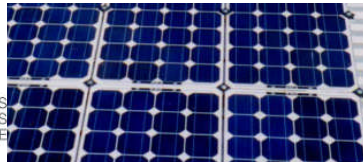
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J} dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Para corrientes en volumen $[\vec{J}] = \frac{A}{m^2}$

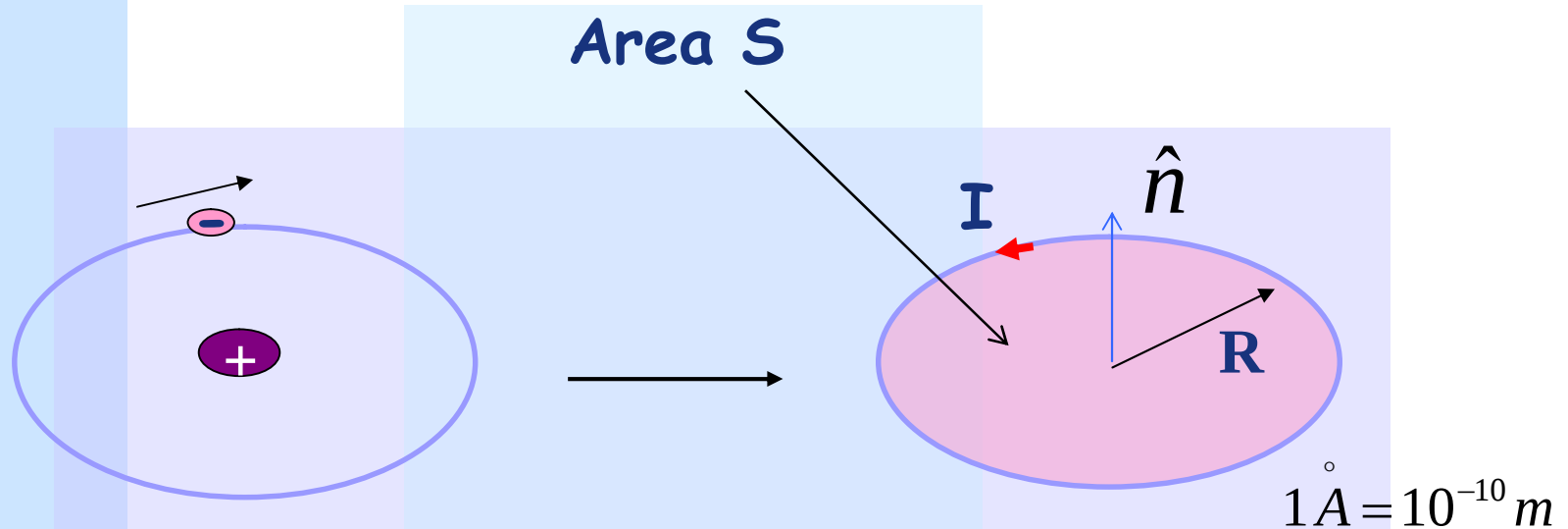


Vector potencial magnético de un dipolo





Modelo atómico de los materiales



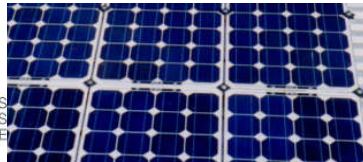
Se puede representar el átomo como un dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S \hat{n} [Am^2]$$



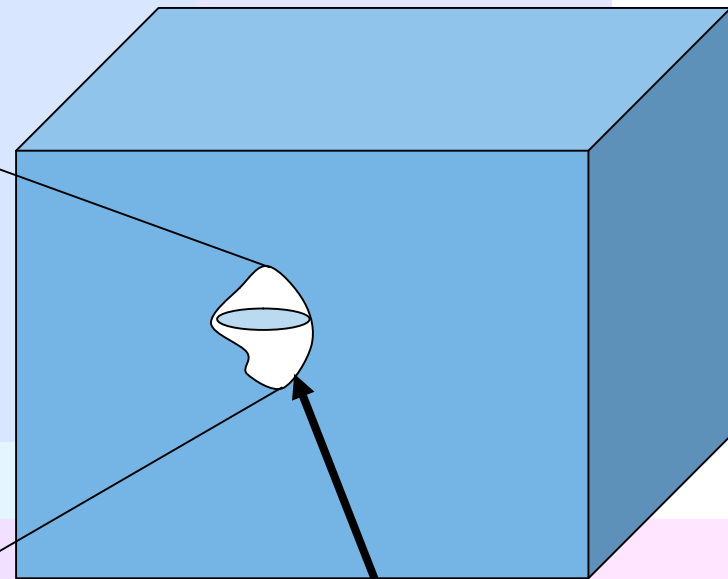
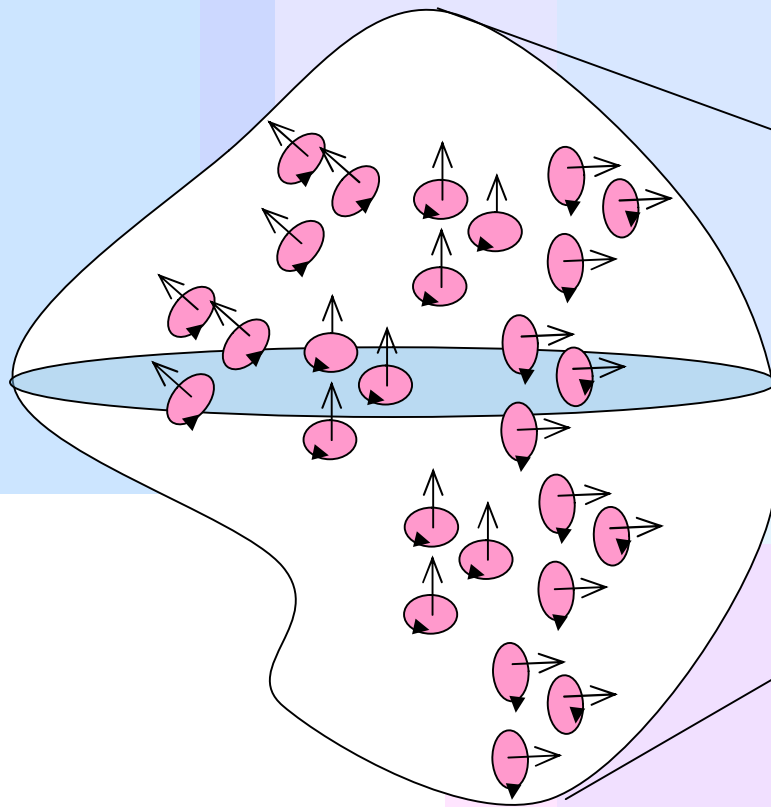
fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

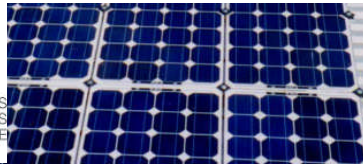


Modelo atómico de los materiales

En un material cualquiera hay un número muy elevado de dipolos magnéticos (10^{17} - 10^{23} átomos/cm³)



**Trozo infinitesimal
de material**

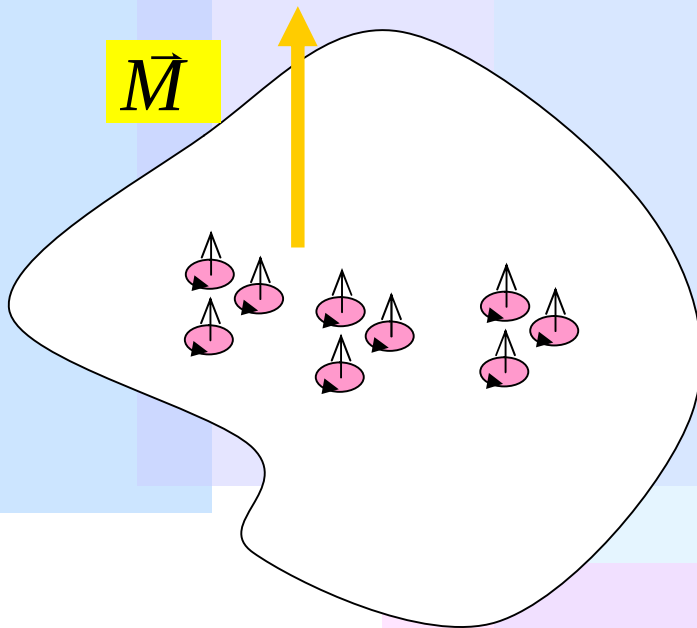


Modelo atómico de los materiales

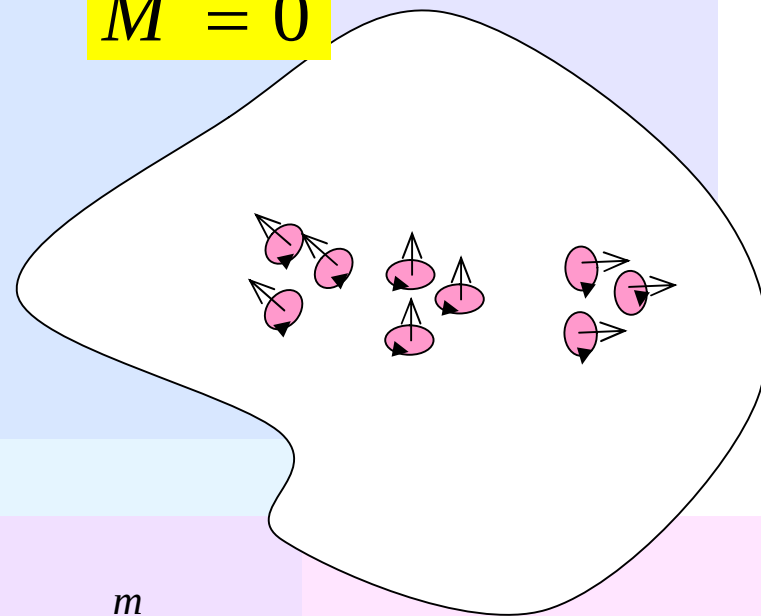
Materiales mantienen la magnetización

Pero la mayoría la pierde

$\vec{M}$



$\vec{M} = 0$

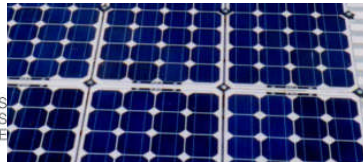


$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^m \vec{m}_k}{\Delta V} [A/m]$$



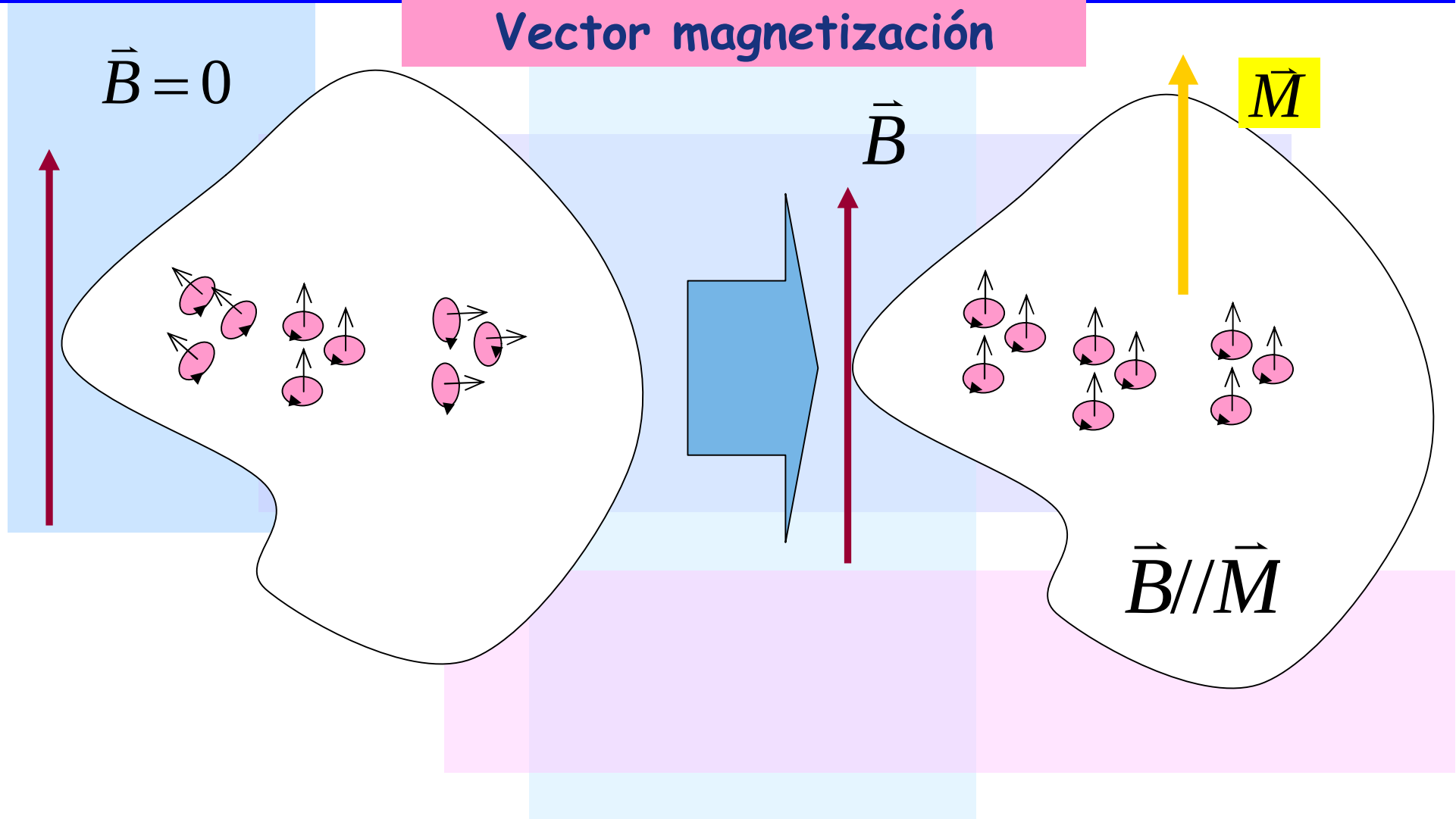
fcfm

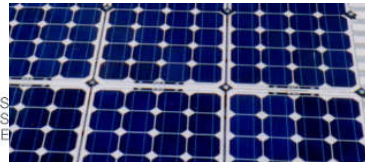
Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



Modelo atómico de los materiales

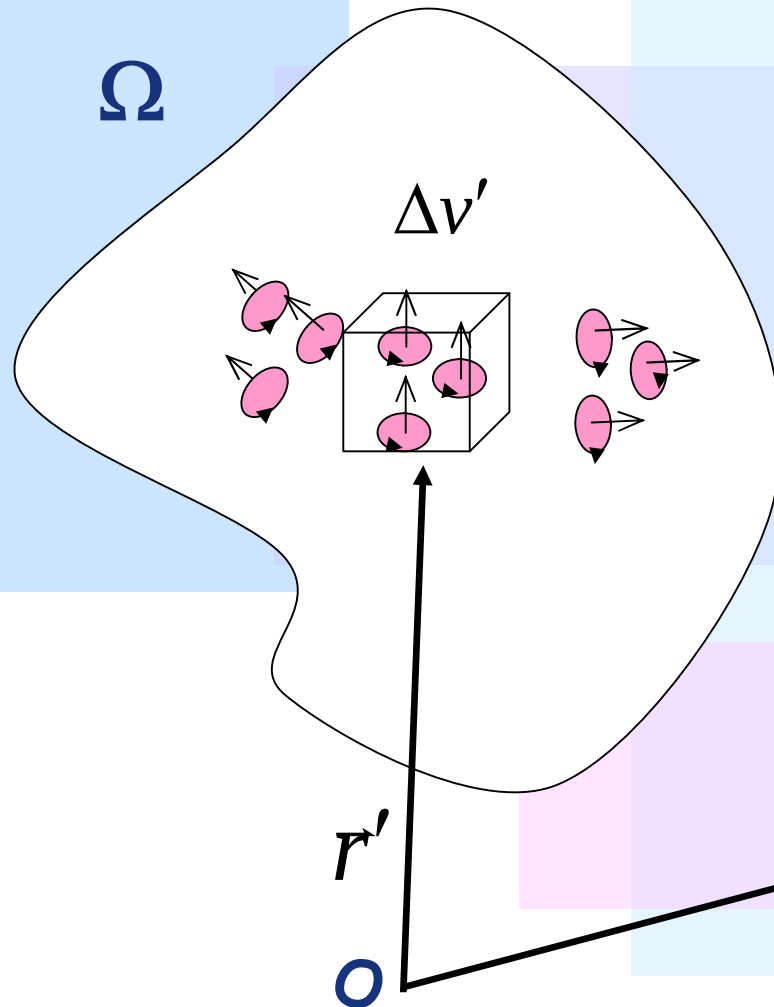
Vector magnetización





Corrientes de Magnetización

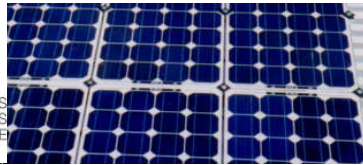
Consideremos un material magnetizado



$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^m \vec{m}_k}{\Delta V} [A/m]$$

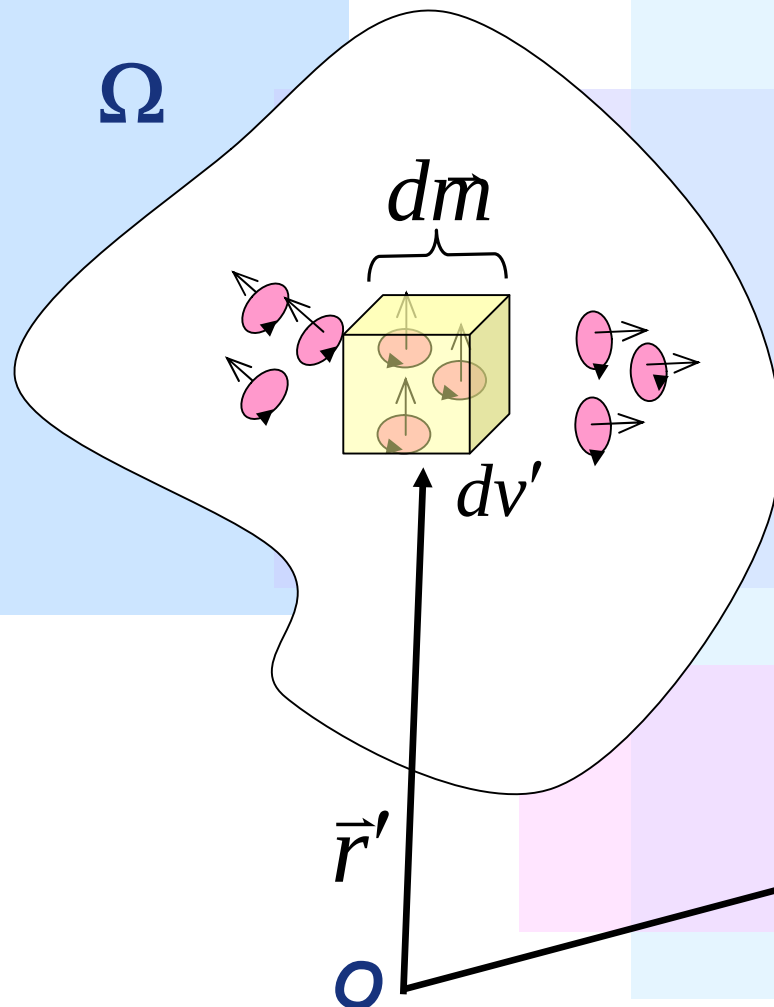
¿Como es el campo
magnético producido por
este material?

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$



Corrientes de Magnetización

Calcularemos el campo a partir del vector potencial magnético

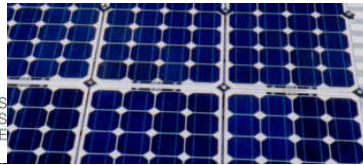


Recordemos que
para un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

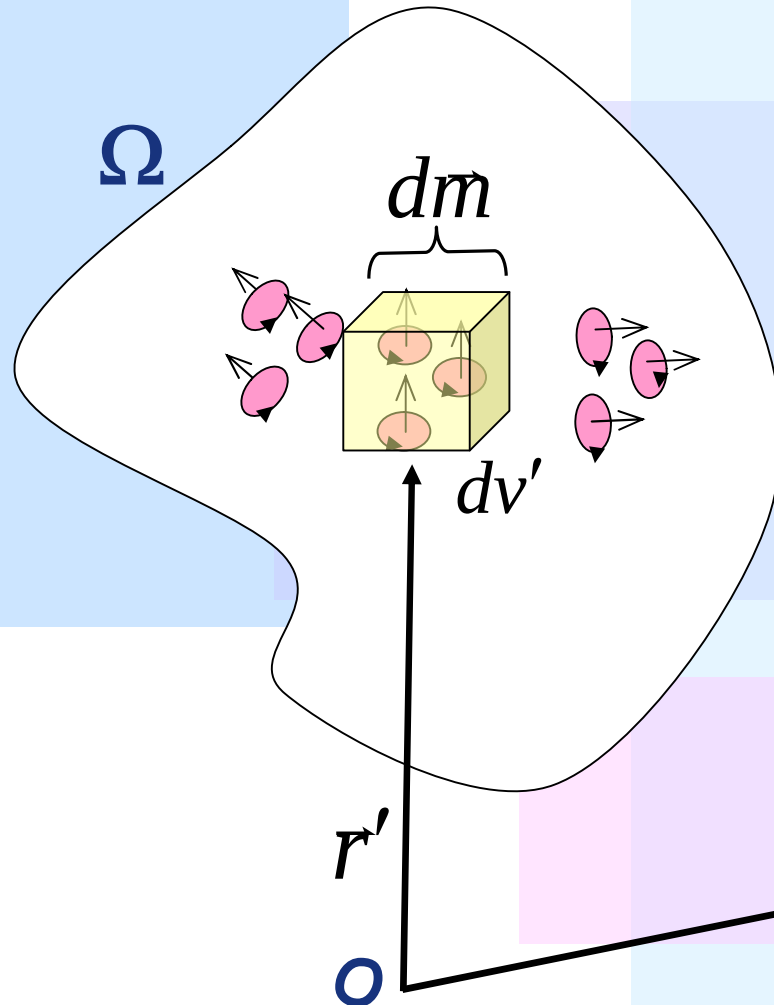
y en forma diferencial

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{m} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Corrientes de Magnetización

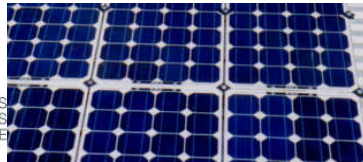
En términos del vector magnetización $d\vec{m} = \vec{M} dv'$



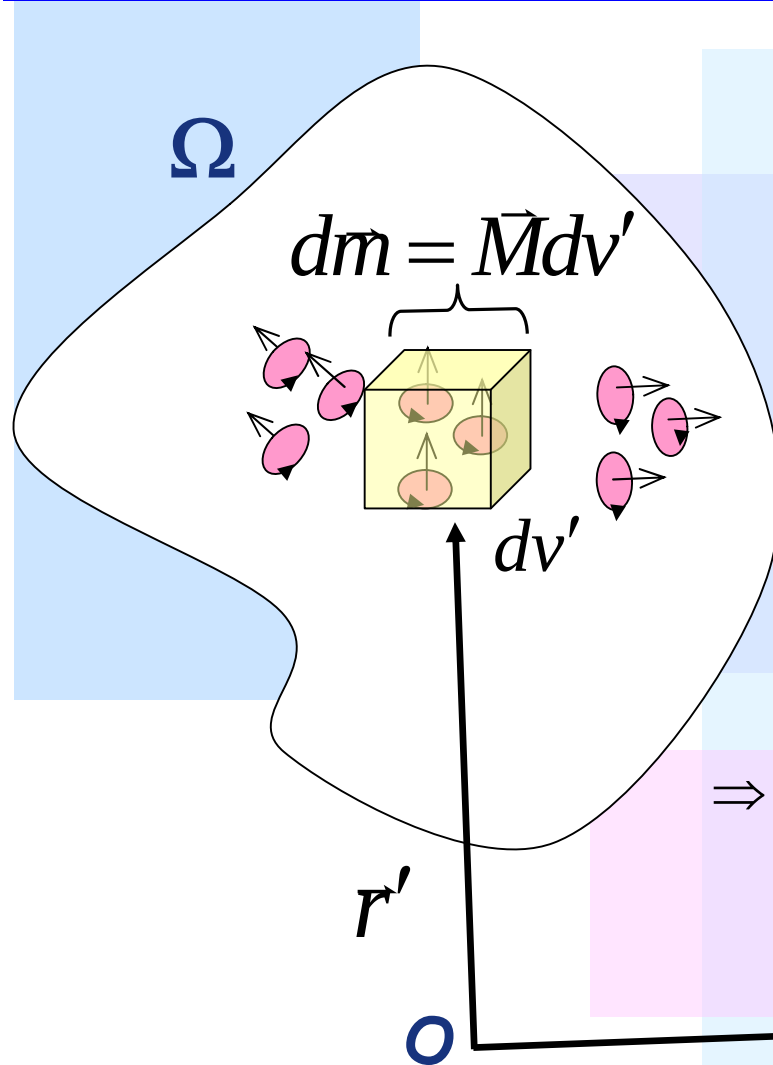
$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} dv' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Se cumple $\nabla_{\vec{r}'} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'$$



Corrientes de Magnetización



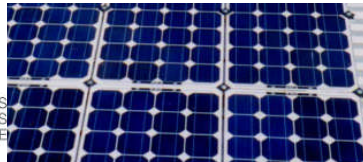
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'$$

Usando la propiedad

$$\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + (\nabla f) \times \vec{F}$$

$$\nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') + \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times \vec{M}(\vec{r}')$$

$$\Rightarrow \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -\nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) + \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$$



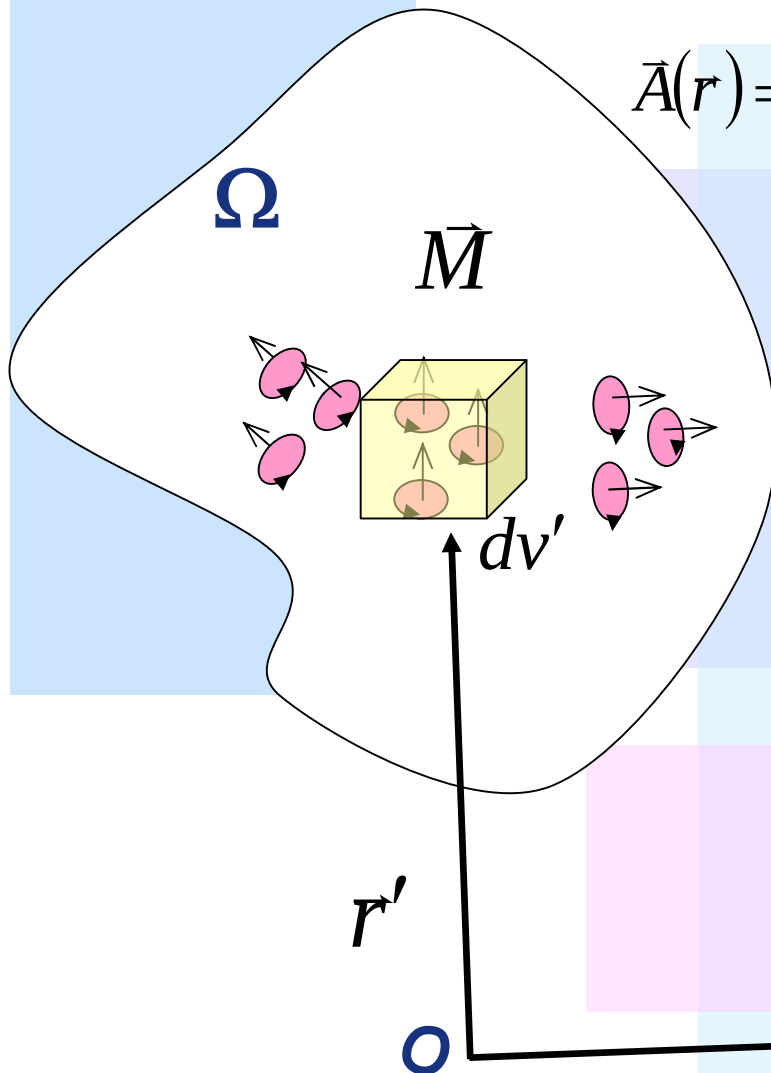
Corrientes de Magnetización

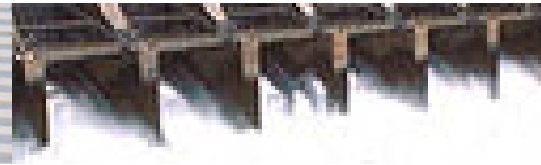
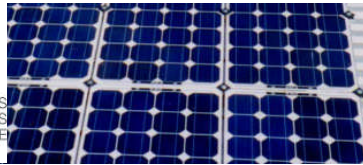
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'$$

Aplicando el teorema

$$\iiint_V \nabla \times \vec{F} dV = - \oiint_{S(V)} \vec{F} \times d\vec{S}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{S(\Omega')} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$





Corrientes de Magnetización

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') d\vec{v}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{S(\Omega)} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{s}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

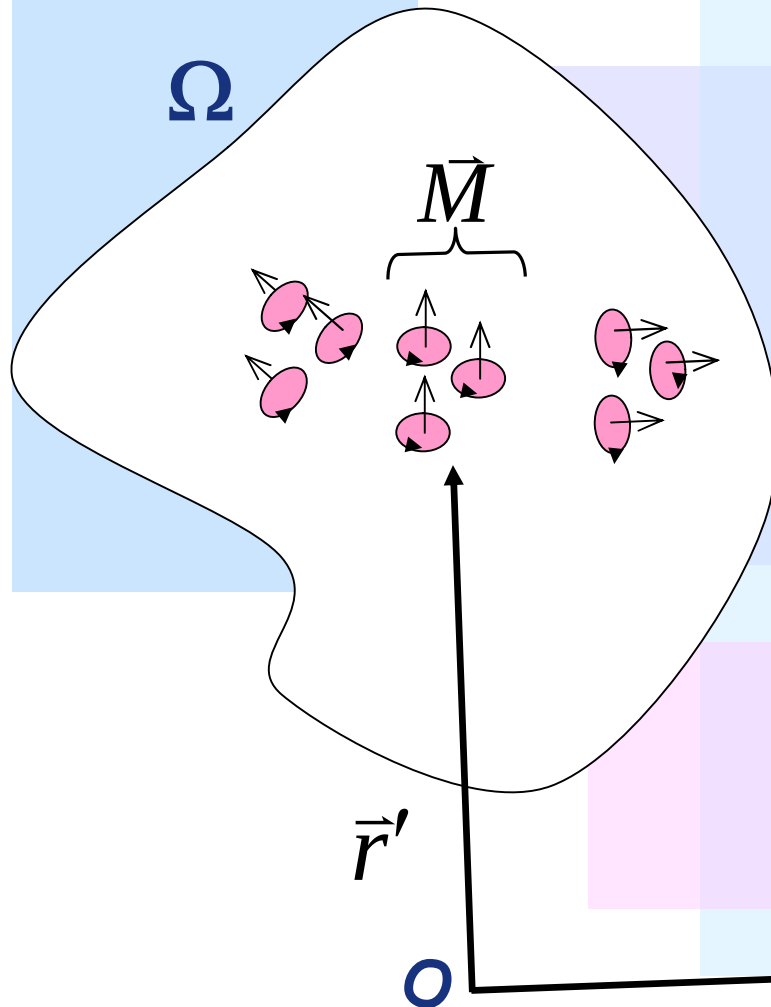
Esta expresión tiene la forma

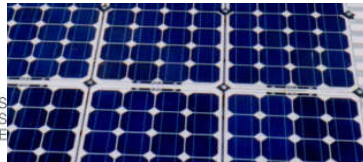
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M d\vec{v}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{S(\Omega)} \frac{\vec{K}_M d\vec{s}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Con densidades de corriente

$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \quad \text{en volumen}$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n} \quad \text{de superficie}$$





Corrientes de Magnetización

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') d\vec{v}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{s}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

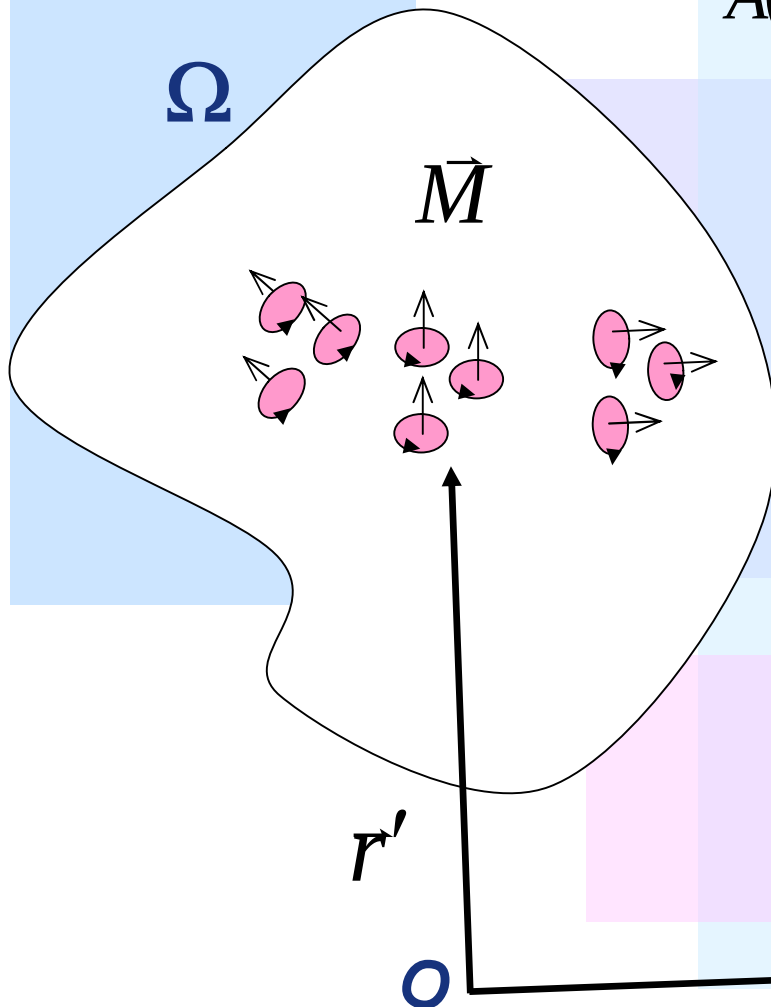
Esta expresión tiene la forma

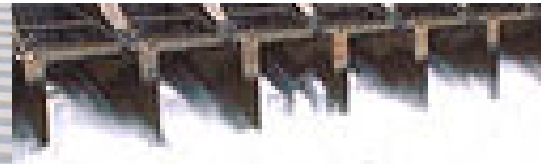
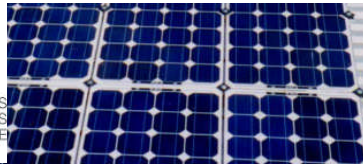
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M d\vec{v}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{K}_M d\vec{s}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Con densidades de corriente

$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \quad \text{en volumen}$$

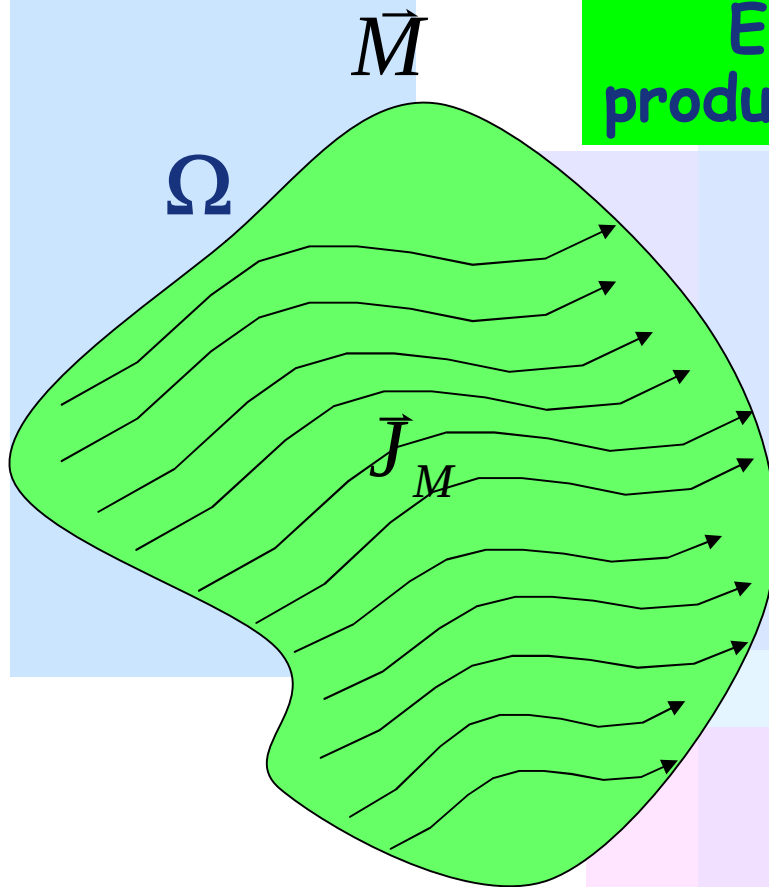
$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{n} \quad \text{de superficie}$$





Corrientes de Magnetización

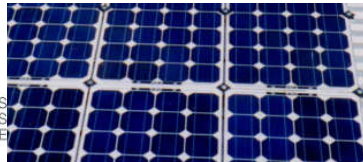
El vector potencial magnético que produce un material con magnetización es



$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente en volumen}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{K}_M ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

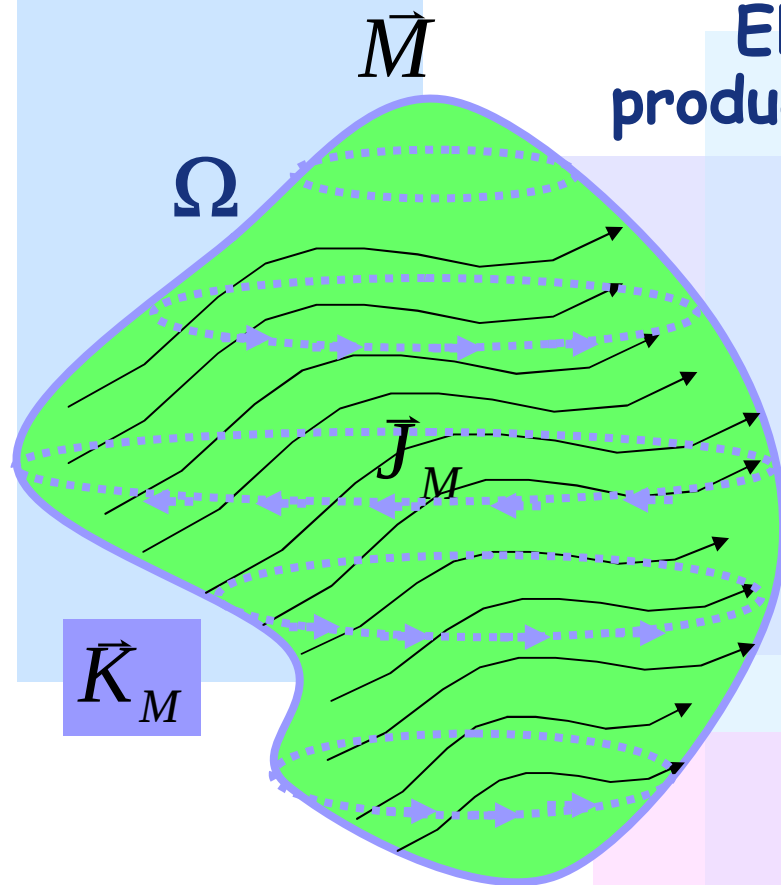
Potencial
producido
por una
densidad de
corriente
en volumen

$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$$



Corrientes de Magnetización

El vector potencial magnético que produce un material con magnetización es



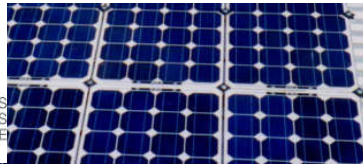
$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente en volumen}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{K}_M ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente de superficie}}$$

Potencial
producido
por una
densidad de
corriente
en volumen

Potencial
producido
por una
densidad de
corriente de
superficie

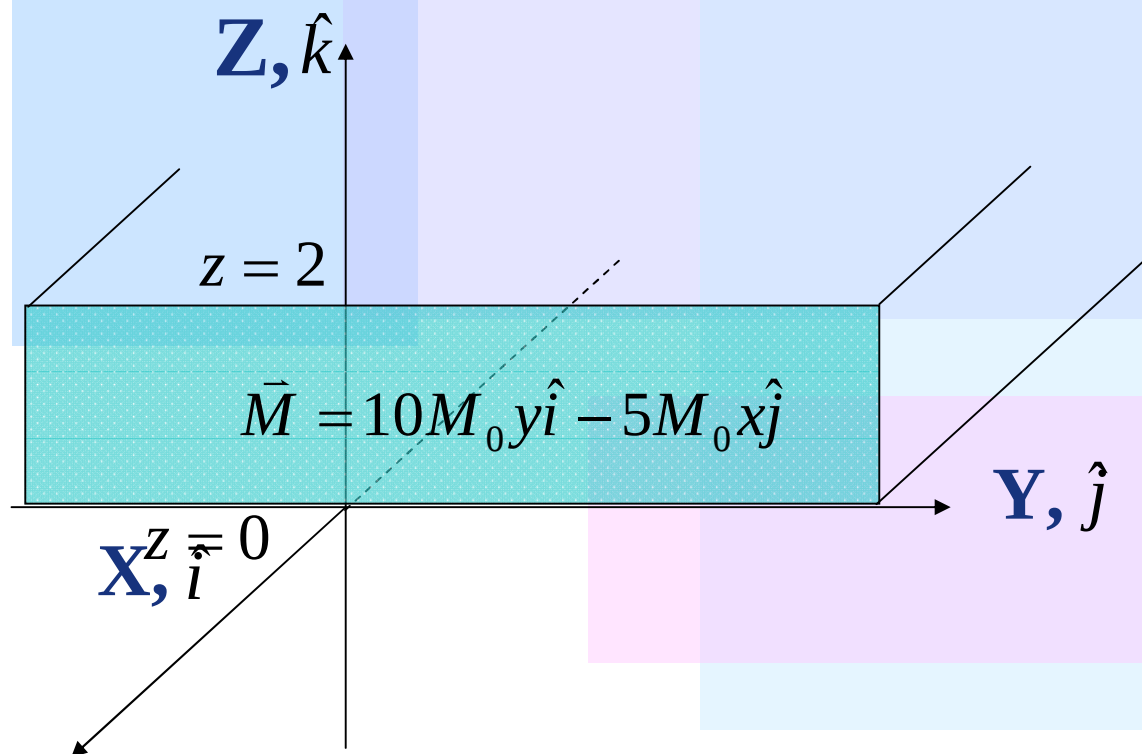
$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{n}$$



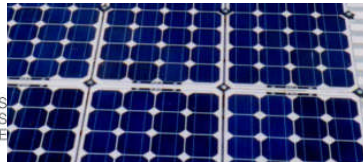
Ejemplo Corrientes de Magnetización

Considere una región del espacio llena de un medio material magnetizado, el cual posee una magnetización $\vec{M} = 10M_0y\hat{i} - 5M_0x\hat{j}$. Se pide determinar las corrientes de magnetización

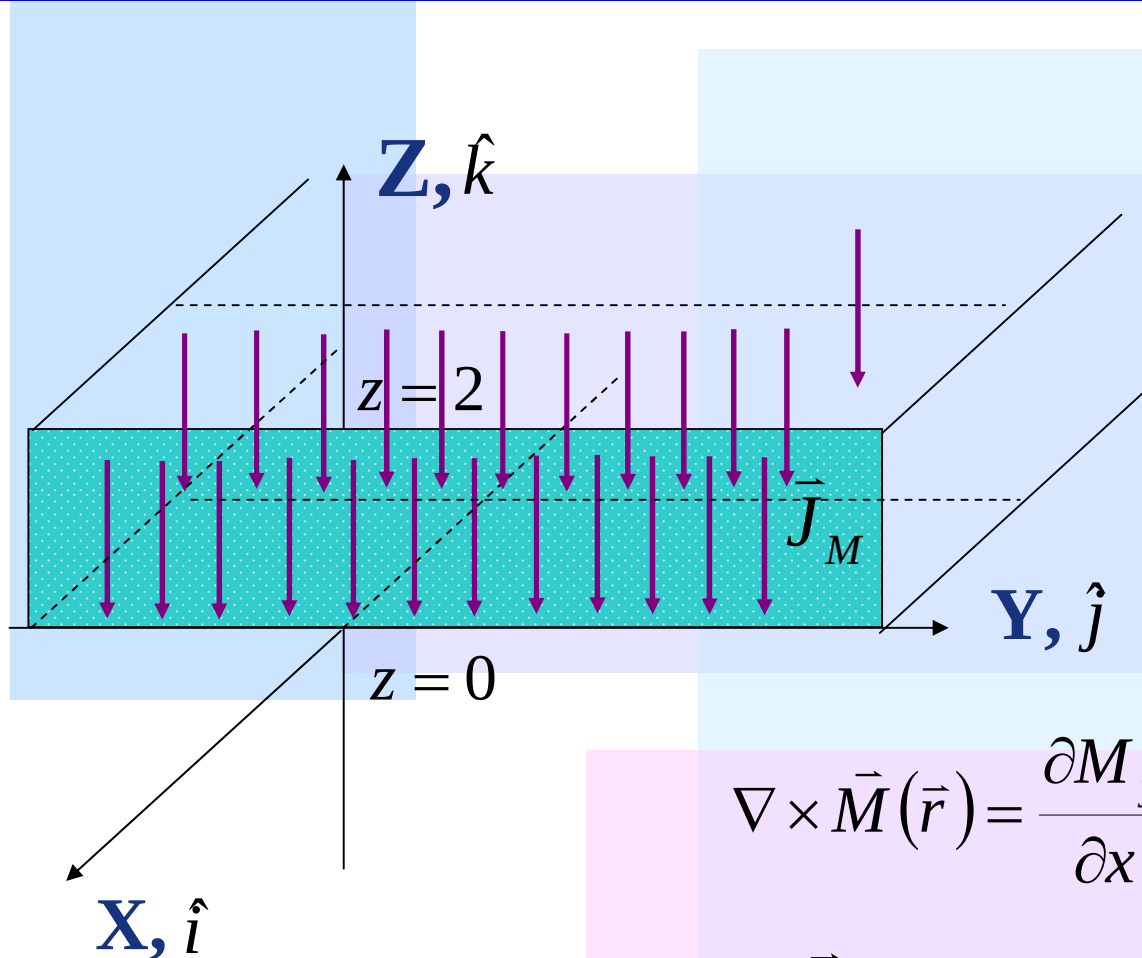


$$\vec{J}_M = ?$$

$$\vec{K}_M = ?$$



Ejemplo Corrientes de Magnetización



$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}(\vec{r})$$

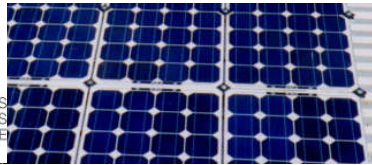
$$\vec{M} = 10M_0y\hat{i} - 5M_0x\hat{j}$$

$$\vec{M} = M_x\hat{i} + M_y\hat{j}$$

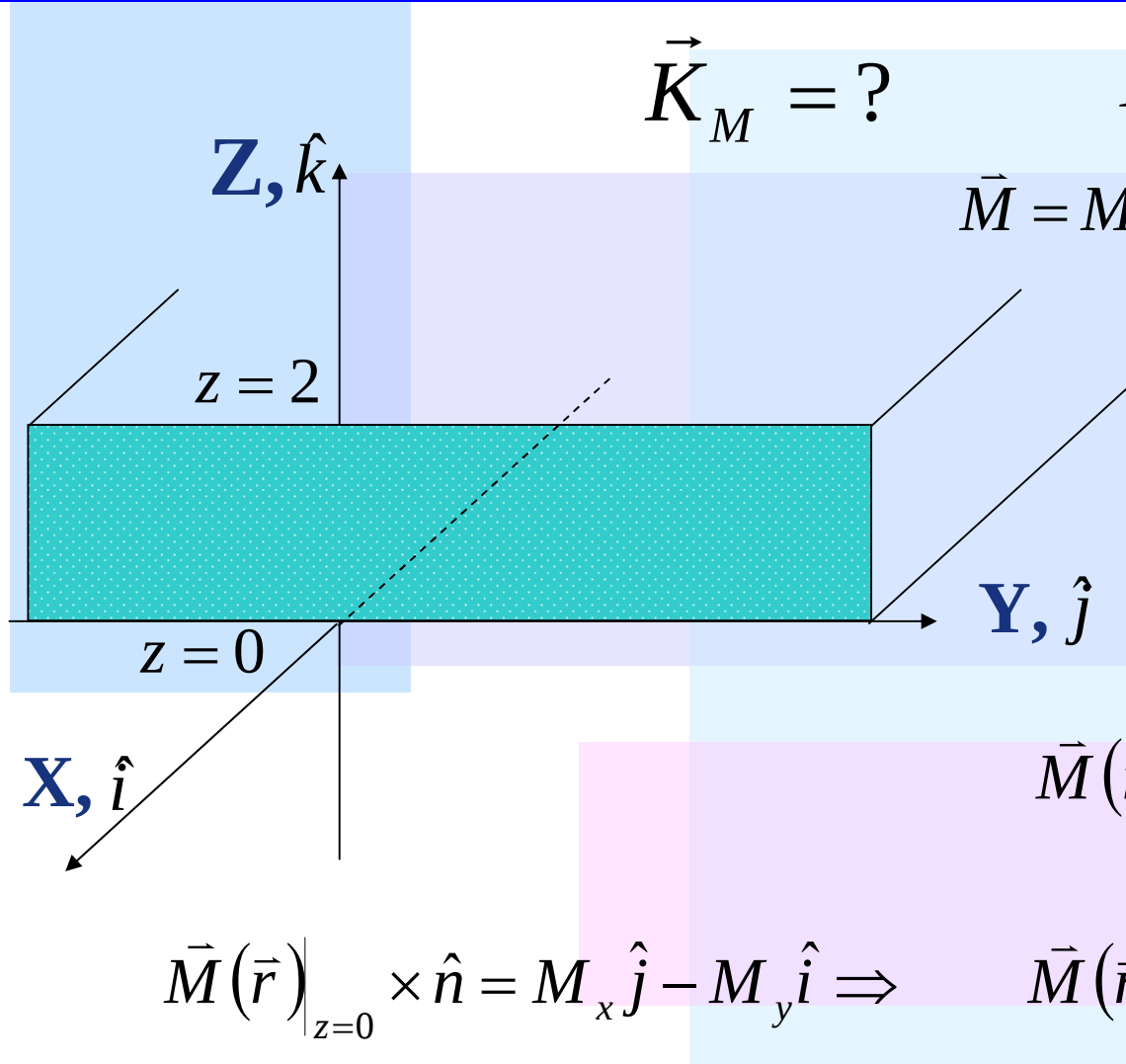
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla \times \vec{M}(\vec{r}) = \frac{\partial M_y}{\partial x}\hat{k} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\hat{k} + \frac{\partial M_x}{\partial z}\hat{j} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_M = M_0(-5\hat{k} - 10\hat{k}) = -15M_0\hat{k}$$



Ejemplo Corrientes de Magnetización



$\vec{K}_M = ?$

$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$

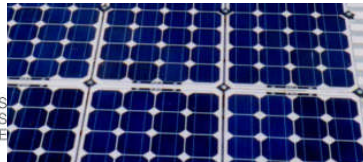
$\vec{M} = M_0(10y\hat{i} - 5x\hat{j}) = M_x\hat{i} + M_y\hat{j}$

$\hat{n} = \begin{cases} -\hat{k} & \text{en } z = 0 \\ \hat{k} & \text{en } z = 2 \end{cases}$

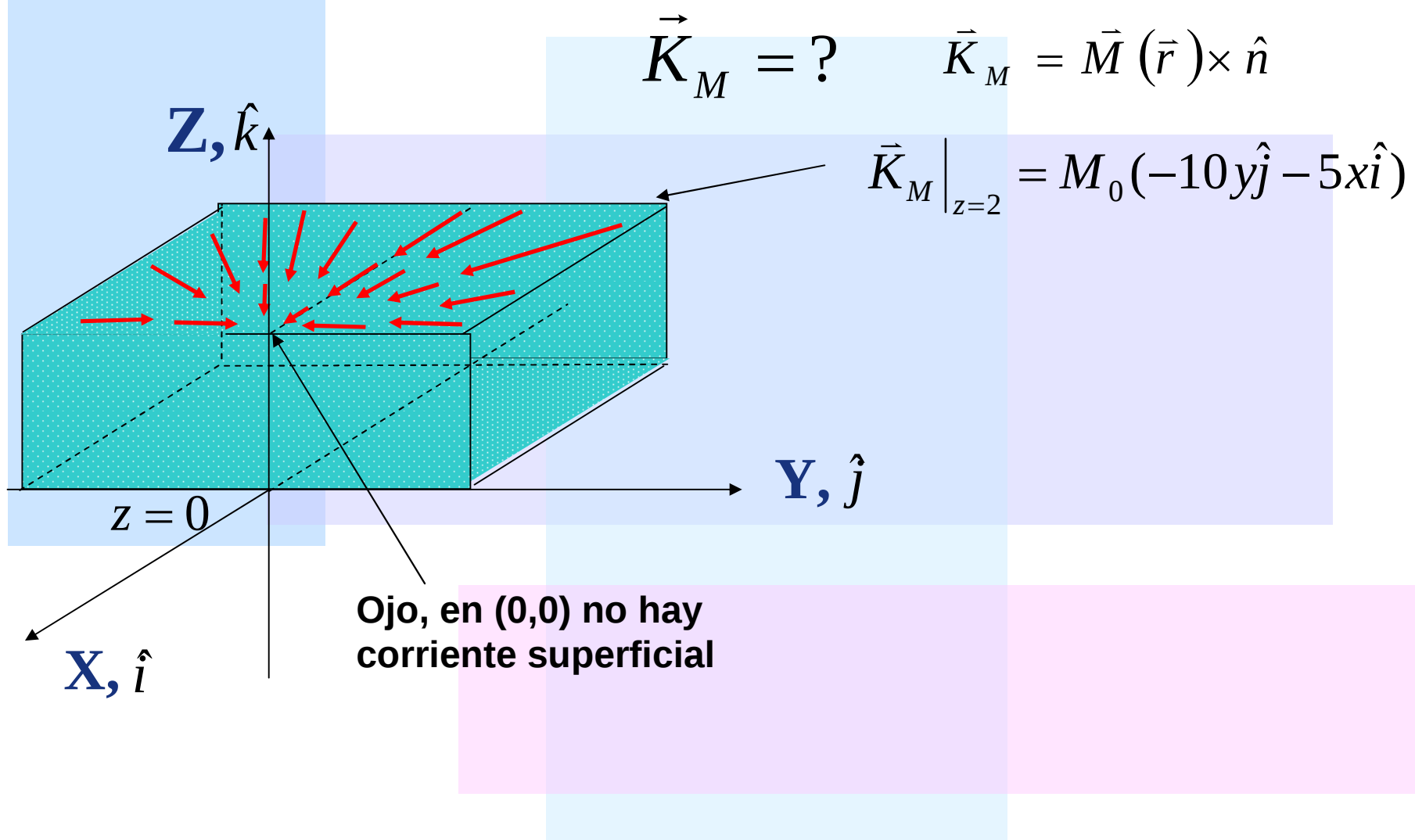
$\vec{M}(\vec{r})|_{z=2} \times \hat{n} = -M_x\hat{j} + M_y\hat{i}$

$\vec{M}(\vec{r})|_{z=2} \times \hat{n} = M_0(-10y\hat{j} - 5x\hat{i})$

$\vec{M}(\vec{r})|_{z=0} \times \hat{n} = M_x\hat{j} - M_y\hat{i} \Rightarrow \vec{M}(\vec{r})|_{z=0} \times \hat{n} = M_0(10y\hat{j} + 5x\hat{i})$

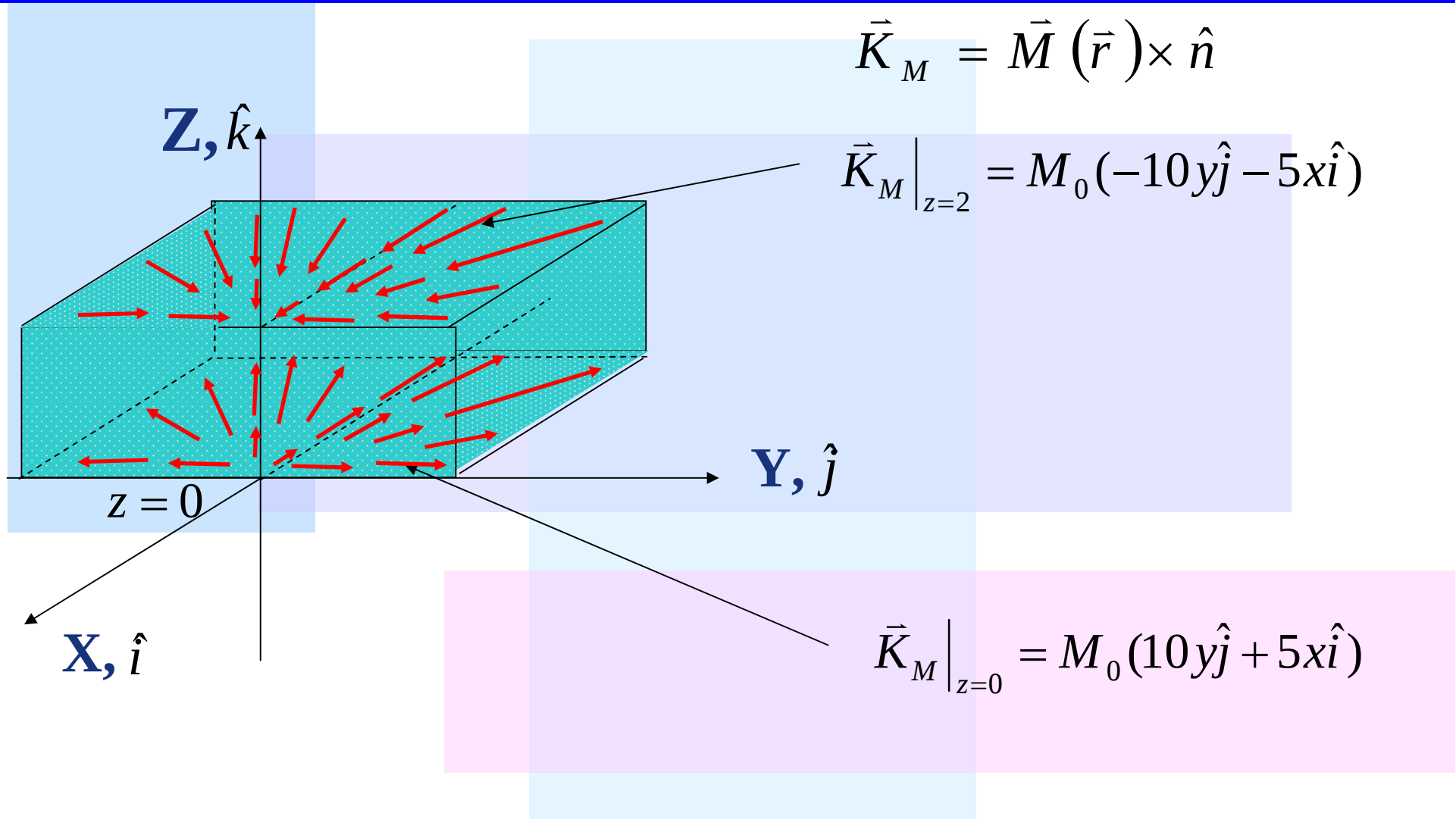


Ejemplo Corrientes de Magnetización



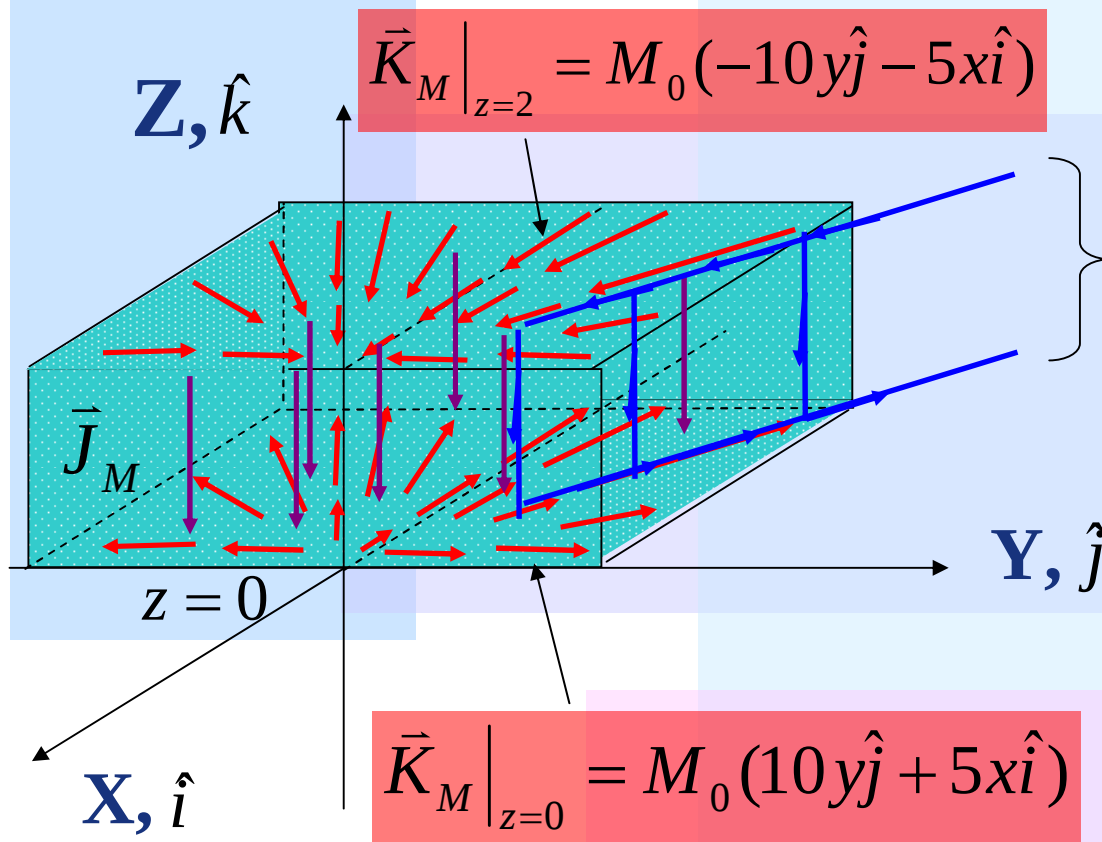


Ejemplo Corrientes de Magnetización





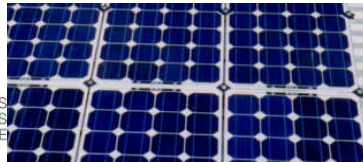
Ejemplo Corrientes de Magnetización



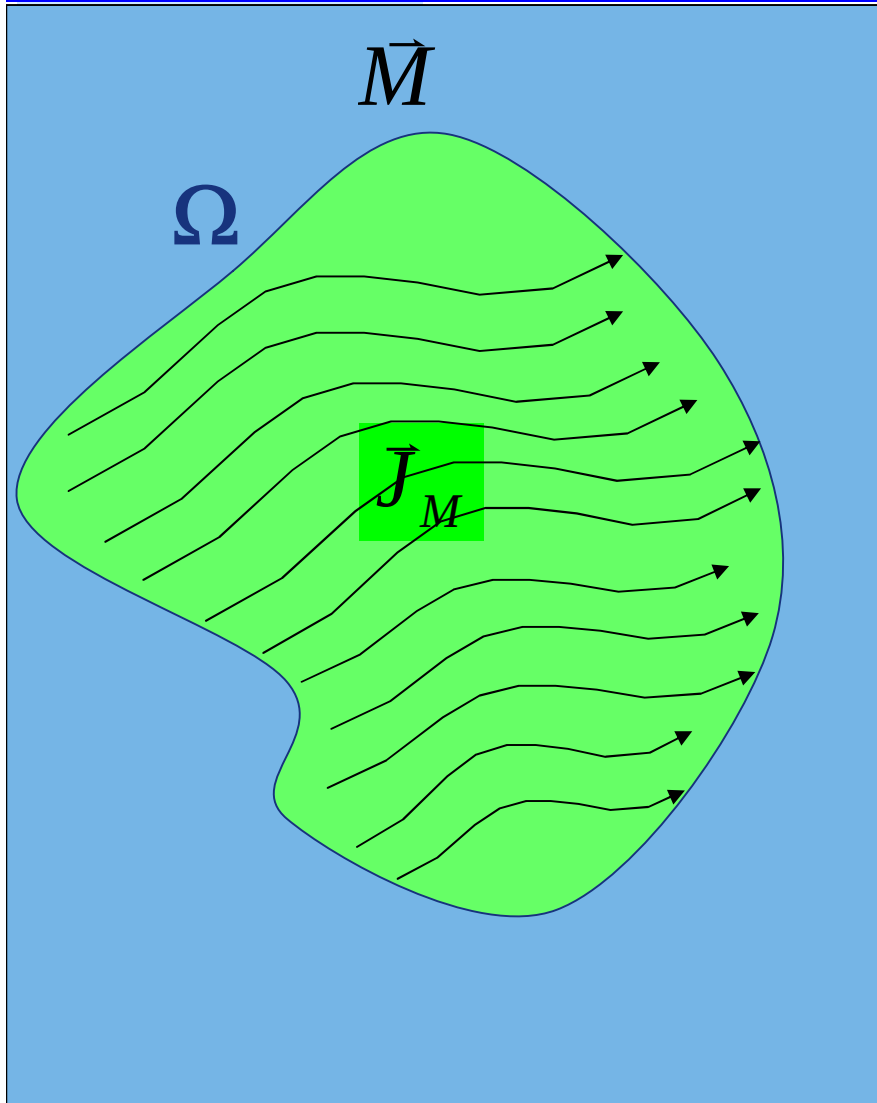
$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$

Circuito típico de corriente de magnetización al interior del material (se cierra en el infinito)

Notar que esta corriente no se debe a los electrones libres que circulan en un conductor metálico !



Permeabilidad magnética



La 4ta ecuación de Maxwell en el espacio vacío es

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

En general pueden haber dos tipos de corrientes en volumen

$$\underbrace{\vec{J}_M}_{\text{Corriente de magnetización}}$$

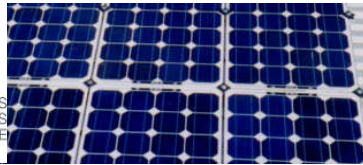
Corriente de magnetización

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$$

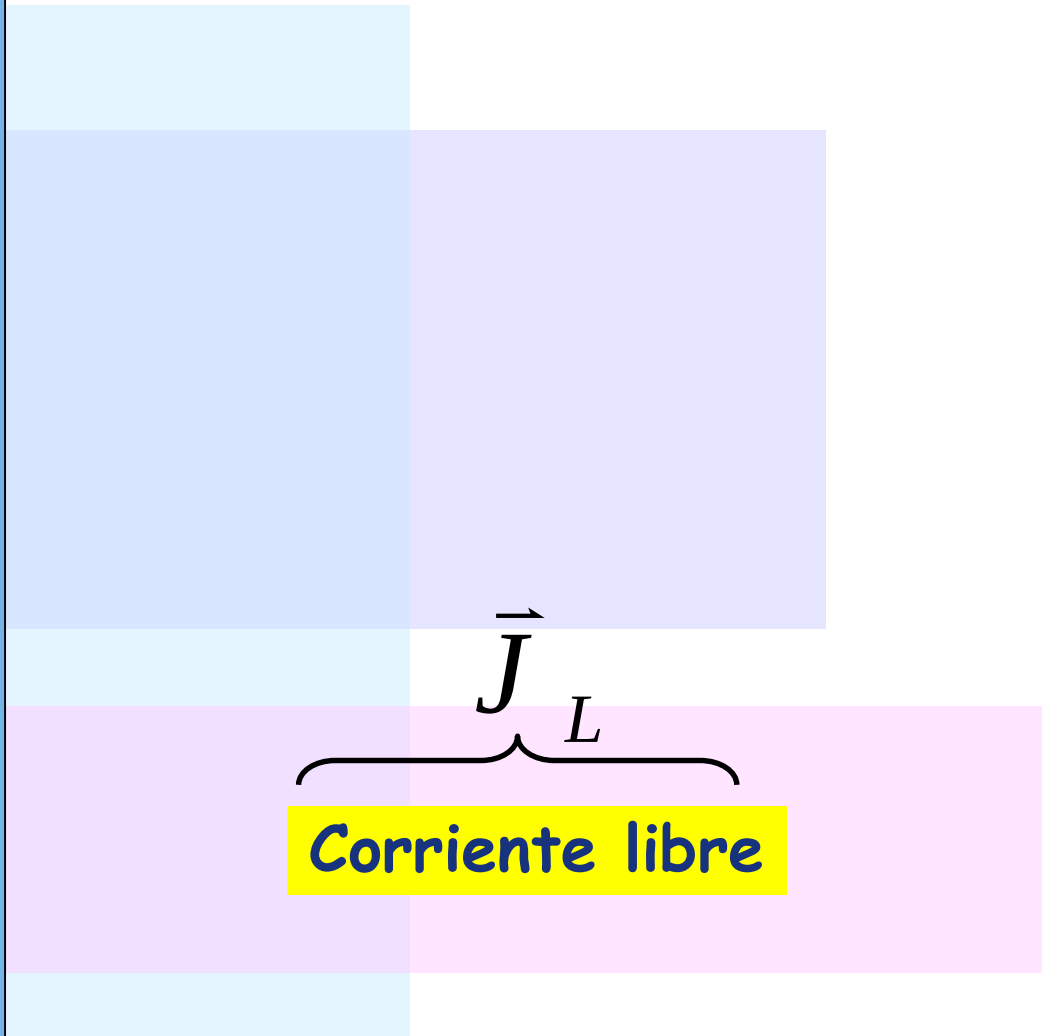
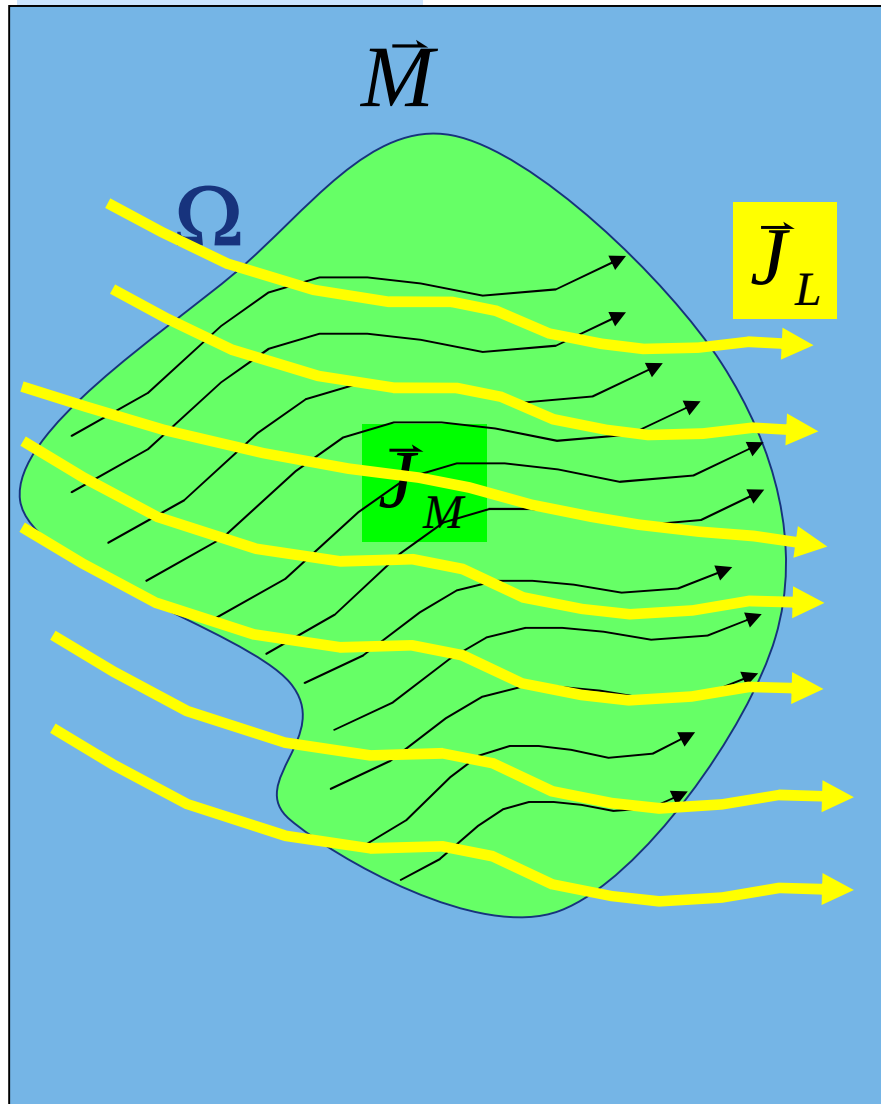


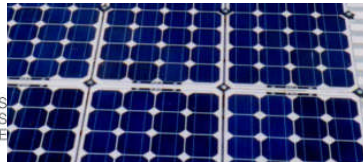
fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

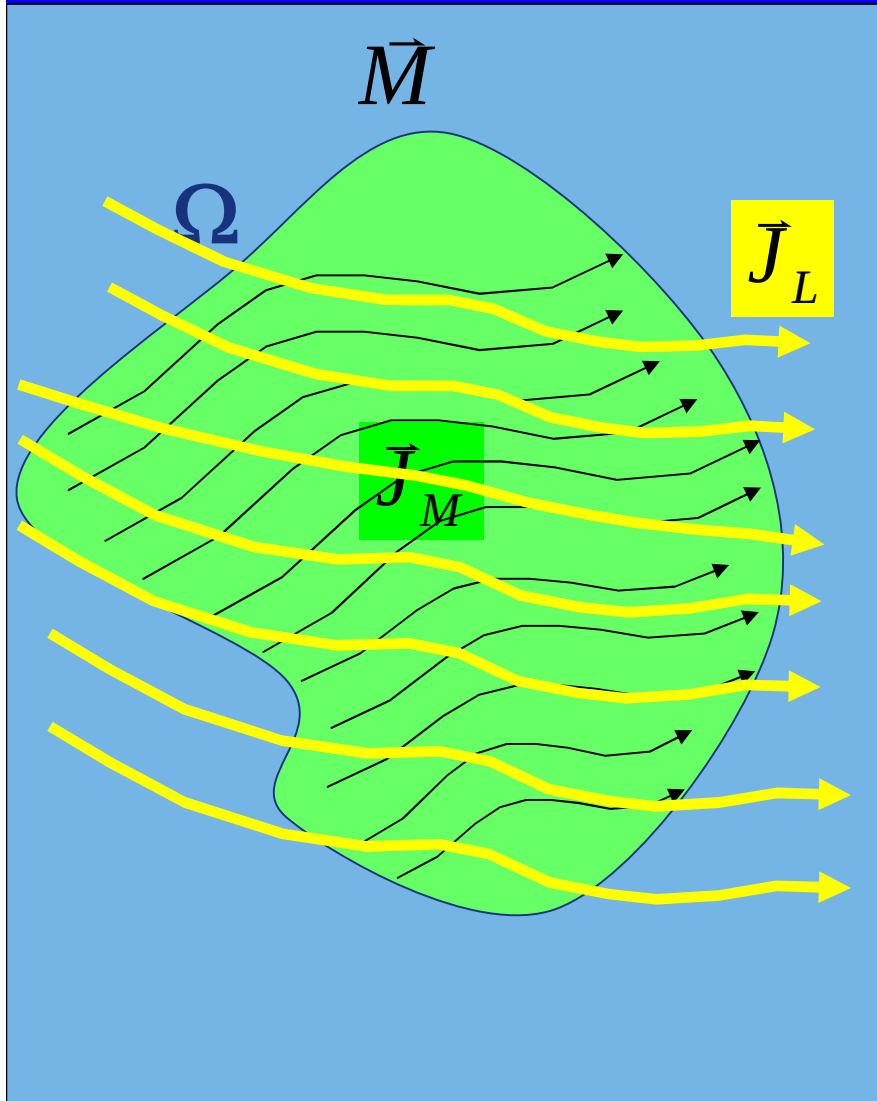


Permeabilidad magnética





Permeabilidad magnética



La 4ta ecuación
de maxwell es

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

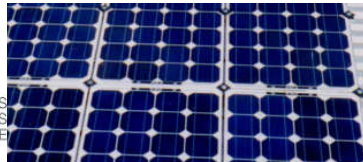
En general pueden haber dos
tipos de corrientes en volumen

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_M$$

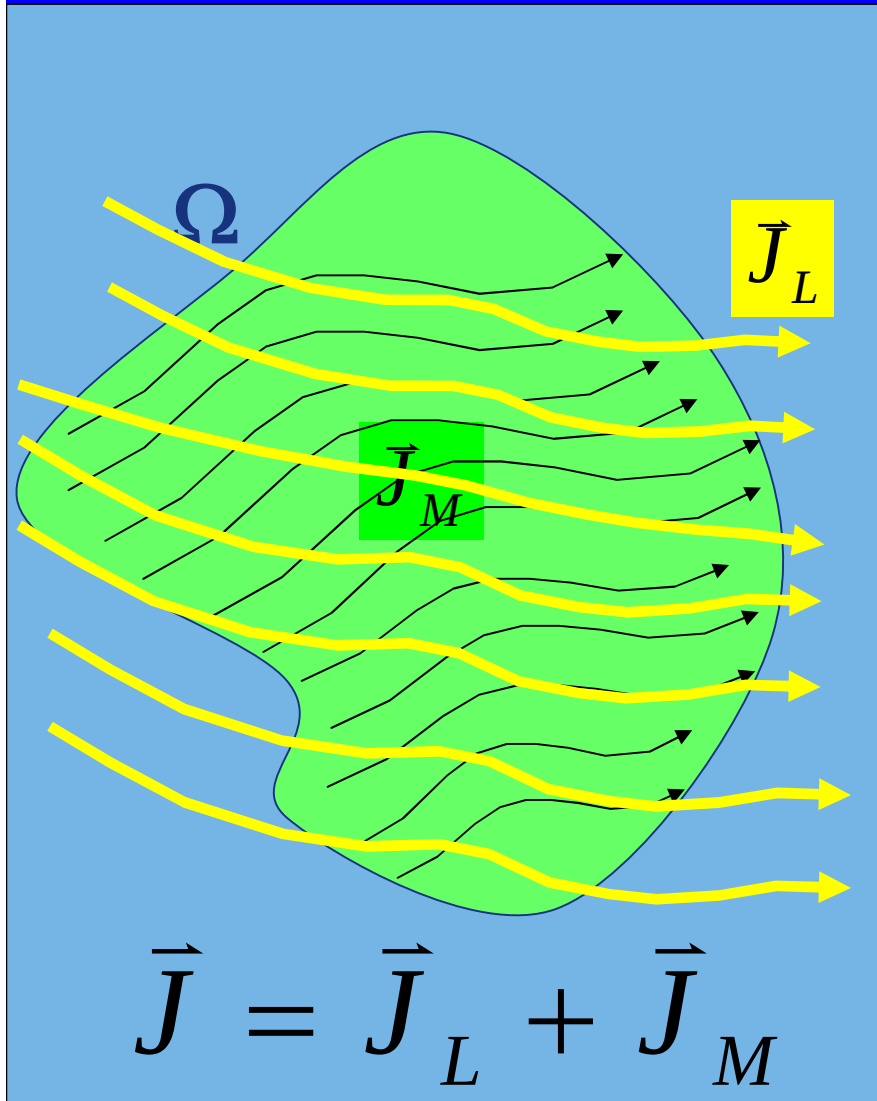
Corriente
libre

Corriente de
magnetización

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$$



Permeabilidad magnética

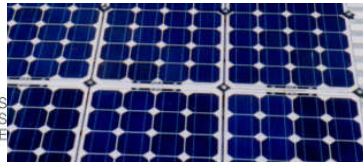


$$\Rightarrow \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}_L + \nabla \times \vec{M}$$

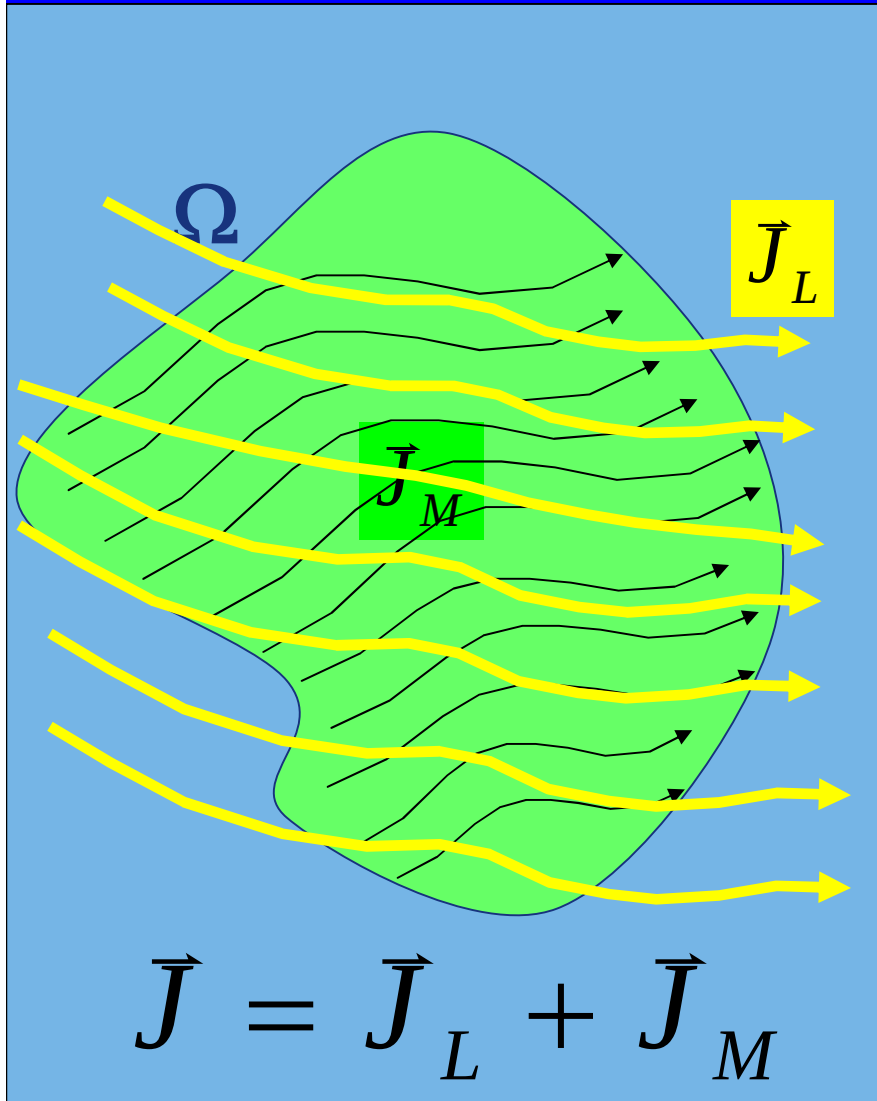
La 4ta ecuación de Maxwell es

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$



Permeabilidad magnética



Experimentalmente se encuentra que

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\mu_R} \vec{H}$$

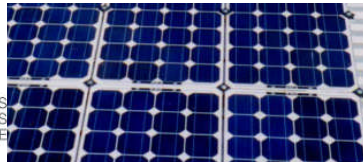
permeabilidad relativa del material

$$\therefore \vec{B} = \mu_0 \mu_R \vec{H}$$

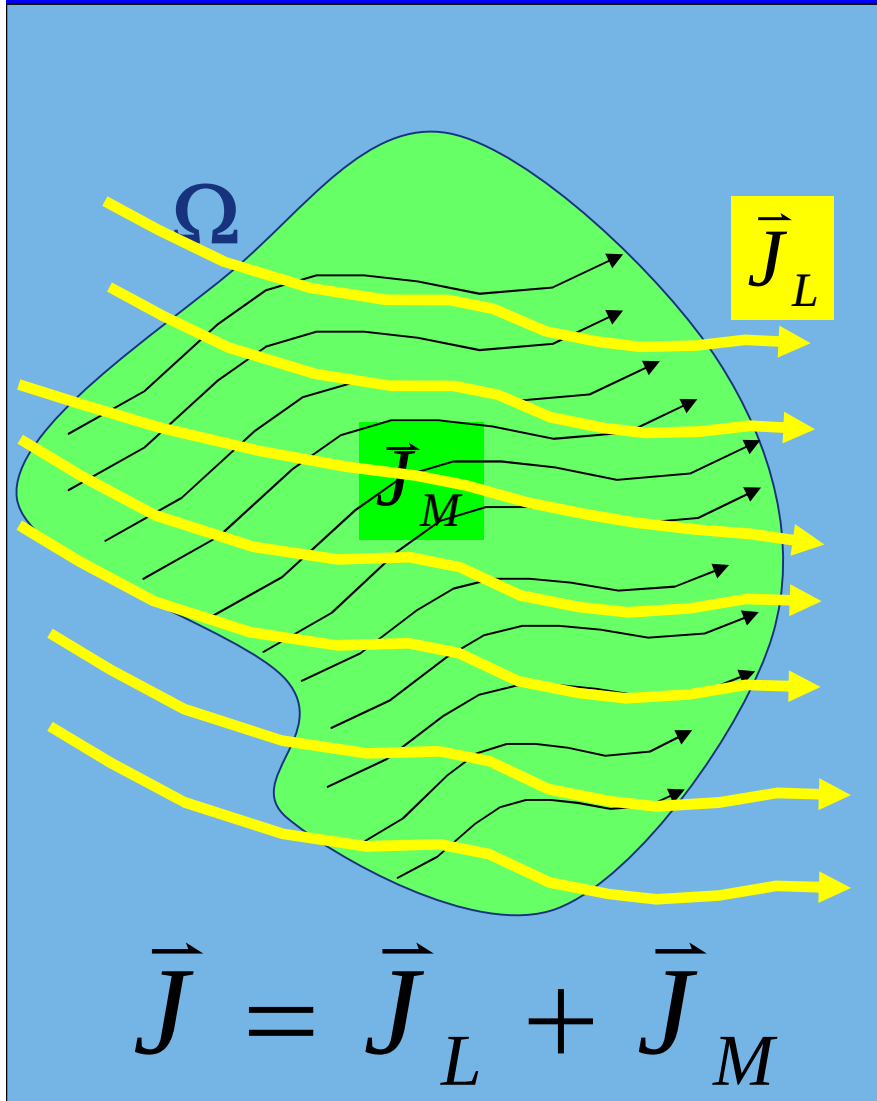


fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



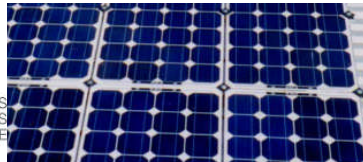
Permeabilidad magnética



$$\therefore \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Permeabilidad magnética
del material

$$\mu = \mu_R \mu_0$$



Clasificación de los Materiales Magnéticos

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\mu = \mu_R \mu_0$$

Materiales magnéticos

**Materiales
diamagnéticos**

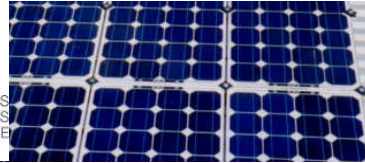
$$\chi_m < 0, \mu_r \leq 1$$

**Materiales
paramagnéticos**

$$\chi_m > 0, \mu_r \geq 1$$

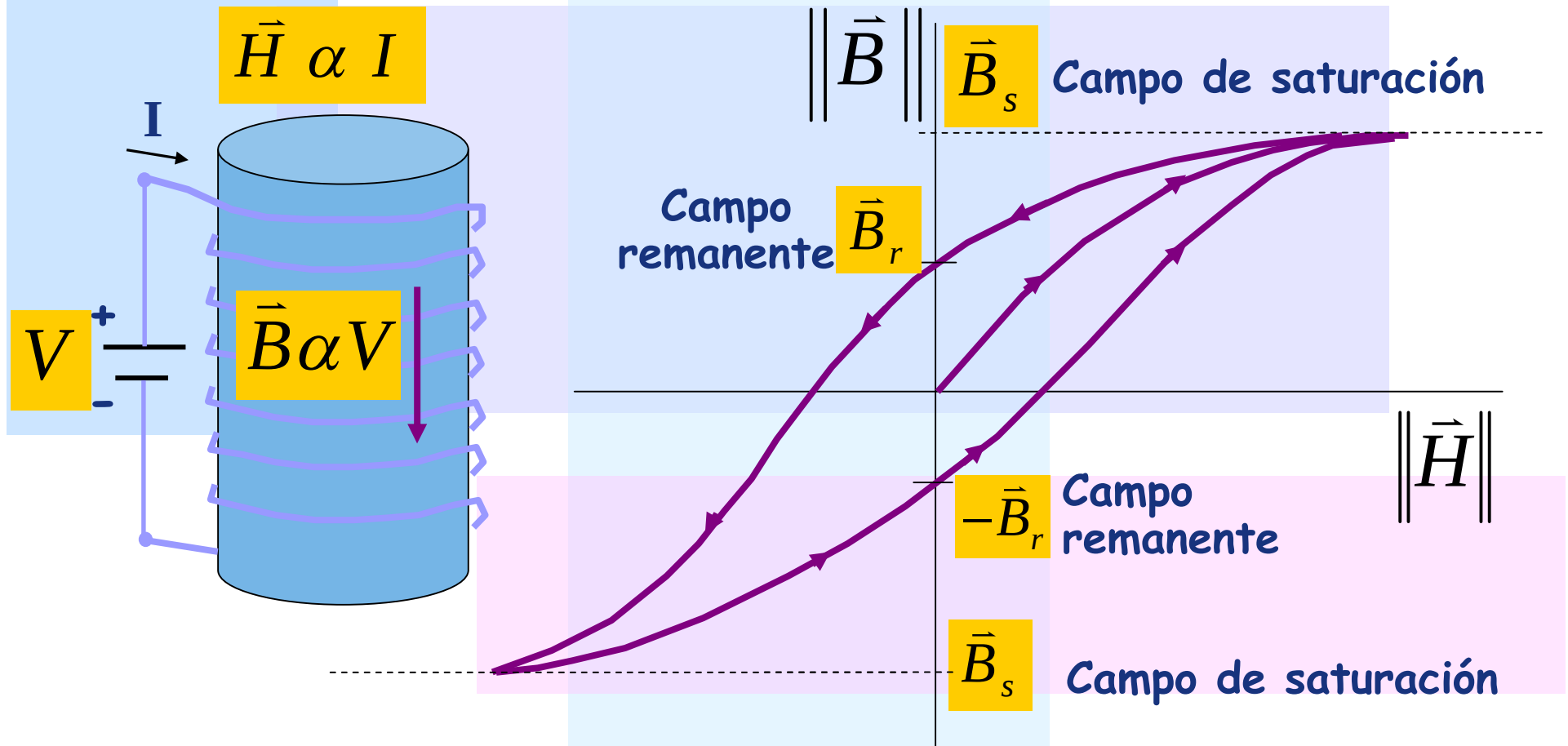
**Materiales
Ferromagnéticos**

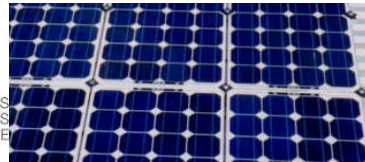
$$\chi_m \gg 0, \mu_r \gg 1$$



Ciclo de histéresis

$\mu = \mu_R \mu_0$ se puede determinar experimentalmente





Clasificación de los Materiales Magnéticos

Material

Diamagnéticos

Bismuto

0.999833

Mercurio

0.999968

Plata

0.9999736

Plomo

0.9999831

Cobre

0.9999906

Agua

0.9999912

Hidrógeno (s.t.p.)

≈ 1.0

Paramagnéticos

Oxígeno (s.t.p.)

0.999998

Aire

1.00000037

Aluminio

1.000021

Tungsteno

1.00008

Platino

1.0003

Manganeso

1.001

Ferromagnéticos

Cobalto

250

Níquel

600

Hierro Suave

5000

Hierro-Silicio

7000