

Resolución Aux. N° 9 FI33A

Prof. Auxiliar: Felipe L. Benavides

Fecha: 14 de Mayo de 2008

I. Ejemplos

Ejemplo N° 1

Éste ejemplo es una sencilla aplicación de la Ley de Ampere. Para cada trozo, sabemos a priori que el campo magnético apunta según $\hat{\theta}$, (regla de la mano derecha), y que no depende más que de ρ . El sistema es infinito en z y simétrico, (dadas las simetrías en θ), por lo que podemos afirmar que lo anterior se cumple en todos los casos. Resolviendo,

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Donde I es la corriente que cruza la superficie encerrada en la curva Γ , cerrada, que recorre la integral de línea. Así,

$$\rho \leq a$$

$$\int_0^{2\pi} B(\rho) \rho d\theta = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 J_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} \rho' d\rho' d\theta = \mu_0 J_0 \frac{\rho^2}{2} 2\pi \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 J_0 \rho}{2} \hat{\theta}$$

$$a \leq \rho \leq b$$

$$\int_0^{2\pi} B(\rho) \rho d\theta = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 J_0 \pi a^2 \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2\rho} \hat{\theta}$$

$$b \leq \rho \leq c$$

$$\int_0^{2\pi} B(\rho) \rho d\theta = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 J_0 \left(\pi a^2 - \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_b^{\rho} \rho d\rho d\theta \right) = \mu_0 J_0 \left(\pi a^2 - \frac{1}{5} \pi (\rho^2 - b^2) \right) \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 J_0 \left[a^2 - \left(\frac{\rho^2 - b^2}{5} \right) \right]}{2\rho} \hat{\theta}$$

$$c \leq \rho$$

$$\int_0^{2\pi} B(\rho) \rho d\theta = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 J_0 \left(\pi a^2 - \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_b^c \rho d\rho d\theta \right) = \mu_0 J_0 \pi \left(a^2 - \frac{1}{5} (c^2 - b^2) \right) \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 J_0 \left[a^2 - \left(\frac{c^2 - b^2}{5} \right) \right]}{2\rho} \hat{\theta}$$

Para que el campo magnético se anule en ésta última situación, (usando que $c = 3a$)

$$a^2 = \frac{(3a)^2 - b^2}{5} = \frac{9a^2 - b^2}{5}$$

$$\therefore b = 2a$$

Ejemplo N° 2

Para resolver el ejemplo calcularemos el campo magnético producido por cada uno de los componentes del sistema en el centro del círculo, y luego sumaremos. (Aplicando superposición). De ésta forma, tendremos que para el alambre circular, por definición, (usando la aproximación filiforme pues se trata de un cable),

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Donde, como siempre, \vec{r} indica la posición en la que se mide, y \vec{r}' recorre la carga. (En éste caso el flujo de corriente, constante). Parametrizando para el centro del círculo, (colocando allí el origen de preferencia para efectuar el cálculo, y teniendo cuidado con el signo del diferencial dada la forma en que se recorre la curva),

$$\begin{aligned} \vec{B}(0) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-Rd\theta\hat{\theta} \times (0\hat{k} - R\hat{\rho})}{R^3} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{R^3} 2\pi\hat{k} = -\frac{\mu_0 I}{2R}\hat{k} \end{aligned}$$

Para el alambre rectilíneo, usamos por conveniencia, la ley de Ampere, conociendo la dirección del campo previamente por el uso de la regla de la mano derecha. (Ésta es general y muy útil para encontrar la dirección de los campos en situaciones sencillas). Se tiene que, nuevamente, parametrizando para el centro del círculo, (ésta vez colocando el origen en la proyección r de radio del círculo justo sobre el alambre rectilíneo),

$$\begin{aligned} \int \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I \Rightarrow \\ \int_0^{2\pi} B(\rho)\rho d\theta &= \mu_0 I \Rightarrow \\ \vec{B}(\rho) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\theta} \end{aligned}$$

Vemos que para calcular la suma de los campos no es necesario adaptar los orígenes, pues, según se tomaron inicialmente, los vectores unitarios $\hat{\theta}$ y \hat{k} coinciden. Evaluando en $\rho = r$, y planteando el campo magnético total, se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{B}_T(0) &= \frac{\mu_0 I}{2} \left(\frac{1}{\pi r} - \frac{1}{R} \right) \hat{k} \\ \therefore r &= \frac{R}{\pi} \end{aligned}$$

Es el valor de r que anula el campo magnético total en el punto deseado.

Ejemplo N° 3

La resolución de éste ejemplo plantea inicialmente un sistema de ecuaciones. Se cumplen, por conservación de energía y de la ecuación de fzas. de Newton,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 = qV & (1) \\ \frac{mv^2}{(\frac{x}{2})} = qvB & (2) \end{cases}$$

Donde v corresponde a la rapidez de la partícula, $\dot{\theta}\frac{x}{2}$. De aquí, resolviendo,

$$m = \frac{1}{8} \frac{B^2 x^2 q}{V}$$

Tanto el tiempo dentro del sistema como la función posición instantánea son muy sencillas de deducir a partir de éste punto. La última queda definida despejando $\dot{\theta}$ de las ecuaciones. Se obtiene que:

$$\vec{r}(t) = \frac{x}{2}\hat{\rho} = \frac{x}{2} \left(\cos\left(\frac{8V}{Bx^2}t\right)\hat{i} + \text{sen}\left(\frac{8V}{Bx^2}t\right)\hat{j} \right)$$

Imponiendo $\theta(t^*) = \pi$,

$$t^* = \frac{\pi Bx^2}{8V}$$

Durante la resolución se supuso, según el enunciado, que la trayectoria es un arco de circunferencia, sin probarlo. La demostración es muy simple y queda propuesta.

II. Problemas Auxiliar

Problema N° 1

Éste tipo de problemas es muy común, y su solución por tanto también es bastante estándar. La idea es calcular la corriente en función del potencial V_0 al que está sometido el material, y de allí simplemente despejar la fracción $\frac{V_0}{I}$. Se asume por supuesto I constante, (no así \vec{J}), que depende de la posición para permitir que lo anterior se cumpla, (se trata de régimen permanente). Con ella entonces, después de despejar \vec{J} , se obtiene \vec{E} , y con él, V_0 . Dada la disposición geométrica del sistema, el vector densidad de corriente apunta según \hat{r} . Resolviendo entonces,

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi J(r)r^2 \text{sen}(\theta) d\theta d\phi$$

$$I = 4\pi J(r)r^2 \Rightarrow$$

$$\vec{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Ahora, por ley de Ohm,

$$g\vec{E} = \vec{J} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{I}{4\pi g_i r^2} \hat{r}$$

Con $i = 1, 2$. Como la densidad de corriente es continua en el espacio, (ppto. probarlo en éste caso, aunque es muy sencillo), la expresión se mantiene y sólo varían los g de la conductividad de los materiales. Calculando entonces la diferencia de potencial, se obtiene:

$$V_0 = V(a) =$$

$$- \int_c^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{I}{4\pi g_1 r^2} dr + \int_b^c \frac{I}{4\pi g_2 r^2} dr \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{I}{4\pi g_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{I}{4\pi g_2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

$$\therefore R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{4\pi g_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{4\pi g_2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

Problema N° 2

a) De la ecuación de continuidad para la corriente en régimen permanente,

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho J)}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{J}(\rho) = \frac{C}{\rho} \hat{\theta}$$

Con C alguna constante por despejar.

b) Por definición, usando (a), (para alguna sección transversal del sistema),

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^h \int_a^b \frac{C}{\rho} \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} d\rho dz = Ch \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

c) La diferencia de potencial V_0 se obtiene tb. por definición, como la integral de línea del campo. Así,

$$g\vec{E} = \vec{J} \Rightarrow \vec{E}(\rho) = \frac{C}{g\rho} \hat{\theta} \Rightarrow V_0 = \int_0^\pi \frac{C}{\rho g} \rho d\theta = \frac{\pi C}{g}$$

Usando V_0 como dato y resumiendo, se obtiene:

$$\vec{J}(\rho) = \frac{V_0 g}{\pi \rho} \hat{\theta}, \quad \vec{E}(\rho) = \frac{V_0}{\pi \rho} \hat{\theta}, \quad I = \frac{V_0 g h}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad \frac{V_0}{I} = R = \frac{\pi}{g h \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Problema N° 3

Para resolver éste problema hay varios caminos. Uno primero determina encontrar el potencial vectorial \vec{A} y a partir de él calcular, con el rotor, el campo magnético, aunque la integral por definición de éste caso es por lo bajo, desagradable. Por definición directa el problema es bastante peor, puesto que la parametrización complica mucho el cálculo. (Cambiando \vec{J} por \vec{K} y dV por dS). Una forma más elegante de resolver, pero no por eso sencilla, (sólo menos trabajosa), determina plantear el diferencial de campo magnético producido por cada línea de ancho diferencial de la cinta. La integral de esto concluye el resultado deseado. Para ilustrar: (mirando la cinta de frente, entre $-\frac{a}{2}$ y $\frac{a}{2}$)

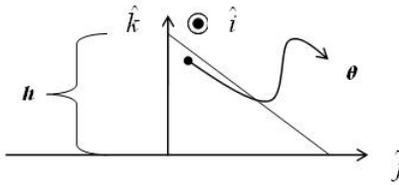


Figura N° 1

El campo magnético que produce un alambre rectilíneo con corriente I es: (ppto. demostrar)

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\theta}$$

Con ρ la distancia en cilíndricas de un punto en el espacio hasta el alambre, para un z fijo. En éste caso, reemplazamos I por $K_0 dy$, y ρ por $\sqrt{h^2 + y^2}$. El vector unitario $\hat{\theta}$ queda $-\left(\hat{k} \sin(\theta) + \hat{j} \cos(\theta)\right)$, usando algo de geometría. Por simplicidad, podemos hacer un cambio de variable que permita trabajar sólo con θ . En efecto, si $y = h \tan(\theta)$, la integral que era entre $-\frac{a}{2}$ y $\frac{a}{2}$ queda entre $-\arctg\left(\frac{a}{2h}\right)$ y $\arctg\left(\frac{a}{2h}\right)$. Así, y cambiando finalmente $dy = h \sec^2(\theta) d\theta$,

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 K_0 h \sec^2(\theta) d\theta}{2\pi \frac{h}{\cos(\theta)}} \left(\hat{k} \sin(\theta) + \hat{j} \cos(\theta) \right)$$

La integral en \hat{k} se anula, (impar en intervalo simétrico), y obtenemos después de integrar, (algo bastante menos pesado que en los otros casos), que:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 K_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{2h} \right) (-\hat{j})$$

Es el valor del campo pedido.

III. Problemas Adicionales

Problema Adicional N° 1

La única real dificultad que presenta éste problema es la forma en abordarlo. Como las corrientes tienen dos componentes, no puede aplicarse directamente la ley de Ampere, pues es difícil *adivinar* la dirección que el campo tomará. Por definición es difícil también, pues el planteo de las integrales es, al menos, complejo. Tiene solución de ésta manera, pero es trabajo innecesario. La idea es que se trabaje para cada componente de la corriente, y con ello se generen componentes para el campo. La totalidad de ellas, superpuestas, determinan el resultado final. Para cada caso, por separado, si es posible usar la ley de Ampere, y entonces el problema es muy sencillo. Planteando entonces:

$$a \leq \rho \leq b$$

Componente según $\hat{\theta}$, $\vec{J} = \frac{\alpha}{\rho} \hat{\theta}$. Suponiendo la dirección del campo generado según \hat{k} , por la regla de la mano derecha, (y única dependencia en ρ dadas las simetrías en z y θ),

$$\int_0^{z'} B(\rho) dz = \mu_0 \int_0^{z'} \int_a^\rho \frac{\alpha}{\rho'} d\rho' dz = \mu_0 \alpha \ln \left(\frac{\rho}{a} \right) z' \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\rho) = \mu_0 \alpha \ln \left(\frac{\rho}{a} \right) \hat{k}$$

Componente según \hat{k} , $\vec{J} = \beta \hat{k}$. Suponiendo ésta vez la dirección del campo generado según $\hat{\theta}$, tb. con la regla de la mano derecha, y la misma dependencia espacial para el campo, (por los mismos argumentos anteriores), tendremos:

$$\int_0^{2\pi} B(\rho) \rho d\theta = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_a^\rho \beta \rho d\rho d\theta = \mu_0 \beta \left(\frac{\rho^2 - a^2}{2} \right) 2\pi \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\rho) = \mu_0 \beta \left(\frac{\rho^2 - a^2}{2\rho} \right) \hat{\theta}$$

Así, el campo magnético total para ésta zona es:

$$\vec{B}(\rho) = \mu_0 \left[\beta \left(\frac{\rho^2 - a^2}{2\rho} \right) \hat{\theta} + \alpha \ln \left(\frac{\rho}{a} \right) \hat{k} \right]$$

$$b \leq \rho$$

El razonamiento es análogo, y los cálculos, muy parecidos. El resultado final es:

$$\vec{B}(\rho) = \mu_0 \left[\beta \left(\frac{b^2 - a^2}{2\rho} \right) \hat{\theta} + \alpha \ln \left(\frac{b}{a} \right) \hat{k} \right]$$

$$\rho \leq a$$

Aquí el campo total es cero. Esto no puede sólo concluirse de la ley de Ampere, puesto que si una integral de línea para una curva cerrada es nula, no necesariamente el integrando es siempre nulo. Eso sí, el vector campo magnético *debe ser nulo* si se sabe que no depende de las variables de integración. Esto, pues si no fuera así la integral *no sería cero*. En éste caso puede argumentarse que, dadas las simetrías, en el mejor caso puede haber dependencia de ρ , pero nada más. Adicionalmente, de la expresión general por definición, dada la ausencia de densidad de corrientes y usando las simetrías del problema, (que permiten separar el desarrollo espacialmente), se concluye similarmente.

Problema Adicional N° 2

La forma de abordar éste problema es muy parecida a la del problema 1 ya resuelto de la auxiliar. Para encontrar la densidad de carga, utilizaremos las condiciones de borde del vector desplazamiento. La cuestión finalmente es despejar dicho vector, pero ésto es sencillo. Calcularemos la forma del vector densidad de corriente, con él los campos eléctricos y de allí los desplazamientos. Dada la diferencia de potencial V_0 , despejar las constantes se reduce a realizar algunos cálculos adicionales. Planteando:

$$\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n} = \sigma_{libre}$$

Necesitamos los \vec{D} . Para ello, (asumiendo régimen permanente, corriente continua y según $\hat{\rho}$, dependiente de ρ únicamente dadas las simetrías del problema y la forma de conexión de potencial),

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^h \int_0^{2\pi} J(\rho)\rho d\theta dz \Rightarrow$$

$$\vec{J}(\rho) = \frac{I}{2\pi h\rho} \hat{\rho}$$

Con I una constante por determinar después. Con éste resultado,

$$\vec{E}_i = \frac{I}{2\pi h\rho g_i} \hat{\rho}$$

Con $i = 1, 2$, para cada medio. Así,

$$\vec{D}_i = \frac{\varepsilon_i I}{2\pi h\rho g_i} \hat{\rho}$$

(Nuevamente $i = 1, 2$). Para las densidades de carga, sólo basta plantear la condición del ppio., de borde para el desplazamiento eléctrico. En rigor, para los radios a , y c , hay una sola densidad de carga, sin embargo para b hay dos, una a cada lado de la delgadísima capa de conductor. Como se pide la carga libre total en cada una de las tres superficies, (habrían 4), se asume que el conductor es suficientemente delgado como para considerar ambas caras como una sola, y se utiliza la densidad total producida. Ésto es una aproximación, (hay en realidad 4 caras, no tres), pero salvo eso, las cargas totales son precisas. Resulta entonces, para los diferentes radios:

$\rho = a$

$$D_{2n} - 0 = \sigma_a = \frac{\varepsilon_1 I}{2\pi h a g_1} \Rightarrow Q_a = \frac{\varepsilon_1 I}{g_1}$$

$\rho = b$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_b = \frac{I}{2\pi h b} \left(\frac{\varepsilon_2}{g_2} - \frac{\varepsilon_1}{g_1} \right) \Rightarrow Q_b = I \left(\frac{\varepsilon_2}{g_2} - \frac{\varepsilon_1}{g_1} \right)$$

$\rho = c$

$$0 - D_{1n} = \sigma_c = -\frac{\varepsilon_2 I}{2\pi h c g_2} \Rightarrow Q_c = -\frac{\varepsilon_2 I}{g_2}$$

Por supuesto, I es desconocida, pero calculable. En efecto, usando que el potencial es V_0 ,

$$V_0 = - \int_c^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{I}{2\pi h\rho g_1} d\rho + \int_b^c \frac{I}{2\pi h\rho g_2} d\rho \Rightarrow$$

$$I = \frac{V_0 2\pi h g_1 g_2}{g_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + g_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)}$$

Reemplazando éste valor en las expresiones anteriores, se tiene lo pedido en a). Para b), la resistencia sale de éste cálculo. En efecto,

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{g_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + g_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)}{2\pi h g_1 g_2}$$

Para la parte c), tiene sentido hablar de condensadores. En general, un condensador es únicamente un componente electrónico compuesto de dos placas conductoras cargadas, con un medio dieléctrico entre medio, en general imperfecto, (con pérdidas). Las cargas antes mencionadas pueden no ser iguales. Si se trata de un condensador muy grande, que tenga un tiempo de carga largo, puede asumirse que el transiente es permanente, y en ésta situación, las placas conductoras tienen efectivamente diferentes niveles de carga. Para ambos condensadores, (tomando como 1 el condensador entre los radios a y b , y 2 el otro),

$$C = \frac{Q_T}{V_T} \Rightarrow C_1 = \frac{Q_a + Q_b}{V_0 - V_b} \text{ y } C_2 = \frac{Q_b + Q_c}{V_b}$$

Los valores de las cargas son conocidos, no así el potencial V_b . Ésta diferencia de potencial, (entre el radio b y tierra, en el radio c), es fácilmente calculable por definición. (Ya fue usada de hecho). En efecto:

$$V_b = - \int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_b^c \frac{I}{2\pi h \rho g_2} d\rho = \frac{I}{2\pi h g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right)$$

Reemplazando ésto en las expresiones anteriores se consigue lo deseado.

Problema Adicional N° 3

a) Para el cálculo en ésta parte no es útil la ley de Ampere pues la trayectoria cerrada utiliza trozos en los que no conocemos el valor del campo. Nuevamente la integral por definición es bastante compleja, y es preferible trabajar con el vector potencial vectorial y luego tomar rotor. Ésto último queda propuesto, puesto que usaremos en la solución la misma técnica que en el Problema 3 antes planteado. Calcularemos entonces el campo magnético sobre el eje de un anillo circular de radio R , y con él, dividiremos el solenoide en espiras y sumaremos todos los aportes.

Nota: En rigor, el vector \vec{H} se denota *intensidad de campo magnético*, y el vector \vec{B} , sólo *campo magnético o inducción magnética*. En éste caso, se calculará \vec{H} .

Según la figura 2,

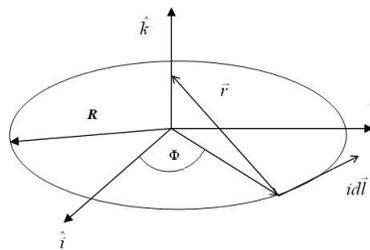


Figura N° 2

$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Con:

$$\vec{r} = z\hat{k} - R\cos(\phi)\hat{i} - R\sin(\phi)\hat{j}$$

$$d\vec{l} = (-R\sin\phi\hat{i} + R\cos\phi\hat{j})d\phi$$

$$r^3 = (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}$$

Entonces,

$$d\vec{H}(z) = \frac{i}{4\pi} \frac{zR\cos\phi\hat{i} + zR\sin\phi\hat{j} + R^2\hat{k}}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} d\phi \Rightarrow \vec{H}(z) = \int_0^{2\pi} d\vec{H}(z) = \frac{iR^2\hat{k}}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ésto resulta ser el vector intensidad magnética sobre el eje z , de un anillo circular de radio R , centrado en el origen y a altura $z = 0$. Dividamos ahora el solenoide en espiras de espesor dz' . Sea m el número de vueltas por unidad de longitud, $m = \frac{N}{L}$. Entonces, en la espira de espesor dz' habrá mdz' vueltas, y la corriente total por ella será

$$i' = imdz'$$

El campo magnético entonces, (considerando que las espiras están en z'), queda:

$$d\vec{H}(z) = \frac{imdz'R^2\hat{k}}{2((z-z')^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

El campo magnético total, (producido por todo el solenoide), a la altura z , resulta:

$$\begin{aligned}\vec{H}(z) &= \int_{z'=0}^L d\vec{H}(z) = \frac{NiR^2\hat{k}}{2L} \int_0^L \frac{dz'}{((z-z')^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{NiR^2\hat{k}}{2L} \left[\frac{-(z-z')}{R^2\sqrt{(z-z')^2 + R^2}} \right]_0^L \\ \therefore \vec{H}(z) &= \frac{Ni\hat{k}}{2L} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2 + R^2}} \right]\end{aligned}$$

b) Ésta parte es bastante mecánica, aunque no por eso sencilla. Buscamos nuevamente \vec{H} , y para obtenerlo planteamos por definición y resolvemos. La ley de Ampere tampoco sirve aquí pues nuevamente, dada la dirección del campo, el camino necesario involucra campos de los que se desconoce su valor. Por ello, parametrizando, tendremos:

$$\vec{H}(z) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'$$

Con:

$$\vec{r} = z\hat{k}, \quad \vec{r}' = r'\hat{\rho} + z'\hat{k} = r'\cos(\theta)\hat{i} + r'\sin(\theta)\hat{j} + z'\hat{k}, \quad \vec{J}(\vec{r}') = \rho r'w\hat{\theta} = \rho r'w(-\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j})$$

Así,

$$\begin{aligned}\vec{H}(z) &= \frac{\rho w}{4\pi} \int_0^R \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{(z-z')r'\cos(\theta)\hat{i} + (z-z')r'\sin(\theta)\hat{j} + r'^2\hat{k}}{[(z-z')^2 + r'^2]^{\frac{3}{2}}} d\theta dz' r' dr' \\ &= \frac{\rho w}{2} \hat{k} \int_0^R \int_0^L \frac{r'^3 dz' dr'}{((z-z')^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Después de algo de trabajo con ésta integral, (primero integrando respecto de dz' y luego en dr'), se concluye que:

$$\vec{H}(z) = \frac{\rho w}{2} \left[z\sqrt{z^2 + R^2} - z^2 + (z-L)^2 - (z-L)\sqrt{(z-L)^2 + R^2} \right]$$