Pauta Ejercicio Nº 2 FI33A

Prof. Auxiliar: Felipe L. Benavides

Fecha: Miércoles 14 de Mayo de 2008

a)

1. Dada la ley de Ohm**,** despejando, se tiene:

$$g\overrightarrow{E} = \overrightarrow{J}$$

$$\therefore \overrightarrow{E} = \frac{J_0 r}{g}\hat{\theta}$$

2. Por definición, puede plantearse

$$P = \int_V \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{E} dV \Rightarrow$$

$$P = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{J_0^2 r^2}{g} r dr d\theta dz = \frac{J_0^2 \pi L}{2g}\left(b^4 - a^4\right)$$

La integral planteada es general, (basta ver la demostración, de calcular los elementos de potencia diferenciales como la multiplicación de los diferenciales de diferencia de voltaje y corriente, no así la expresión $P = \triangle V \cdot I$. Como

$$dP = dV \cdot dI \Rightarrow dP = \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{r}\overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{S} \Rightarrow P = \int \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{E} dV$$

Ésto no es siempre es igual a

$$P = \int \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{r}\overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{S} = \int \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{r} \int \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{S},$$

pues no siempre el potencial es único, lo que se traduce matemáticamente en que, si el campo depende de las variables en las que se integra la densidad de corriente, no se puede separar la integral de volúmen, por lo que la última igualdad *no* se tiene.

3. Calculando de forma sencilla se obtiene:

$$I = \int \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{S} = \int_0^1 \int_a^b J_0 r dr dz = \frac{J_0}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

b)

1. Podemos calcular con Gauss fácilmente el campo en ésta situación. Basta ver que el sistema es simétrico según θ, y despreciando los efectos de borde dados por z fijo, el campo eléctrico sólo dependerá de ρ. (Por notación se usa r en vez de ρ para diferenciar de la densidad de carga). Como siempre, se encierra un cilindro en situaciones cilíndricas, y las tapas no aportan pues las normales son ortogonales al campo. De ahí, el efecto se reduce al producido por el manto. Así:

$$\int \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int_0^{z'} \int_0^{2\pi} E(r) r d\theta dz = \frac{\int_0^{z'} \int_0^{2\pi} \int_a^r \rho_0 r' r' dr' d\theta dz}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(r) r 2\pi z' = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3 - a^3}{3}\right) 2\pi z' \Rightarrow \overrightarrow{E}(r) = \frac{\rho_0}{3r\varepsilon_0}\left(r^3 - a^3\right)\hat{r}$$

2. $P=0$. Basta ver que $\overrightarrow{J}$ y $\overrightarrow{E}$ son ortogonales, y la integral antes planteada resulta nula. Esto es completamente coherente con lo anterior, puesto que la potencia calculada se refiere al efecto Joule, que dado que el movimiento de las partículas es síncrono, (no hay choques), es inexistente.

3. Planteando igual que en a), pero con la densidad de corriente cambiada, (corriente de convección), se obtiene:

$$\overrightarrow{J}' = \rho_c v_c = \rho_0 w r^2 \hat{\theta} \Rightarrow$$

$$I' = \int \overrightarrow{J}' \cdot d\overrightarrow{S} = \int_0^1 \int_a^b \rho_0 w r^2 dr dz = \frac{\rho_0 w}{3}\left(b^3 - a^3\right)$$

Para que ambas corrientes sean iguales, i.e., $I' = I$,

$$\frac{\rho_0 w^*}{3}\left(b^3 - a^3\right) = \frac{J_0}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

$$\therefore w^* = \frac{3J_0}{2\rho_0}\left(\frac{b^2 - a^2}{b^3 - a^3}\right)$$

Nota: Cada sección numerada en a) y b) vale 1 pto. Consecuentemente, en b) 3. w^* e I' valen 0.5 ptos c/u.