Resolucion Auxiliar N°6 FI33A

Prof. auxiliar: Luis Sánchez L

23/04/2008

Pregunta 1
Un cable coaxial esta formado por dos conductores perfectos, cilindricos, coaxiales, de radios a y b y de longitud L. El espacio entre los conductores se llena con dos dielectricos imperfectos de constantes (ϵ_1,$g1$) y (ϵ_2,$g2$), como se muestra en la figura 1. La diferencia de potencial entre los conductores es V_0.

a) Determine los campos $\vec{E}$ y $\vec{J}$ dentro del cable.

b) Determine la resistencia R del cable coaxial y representela graficamente como un circuito equivalente.

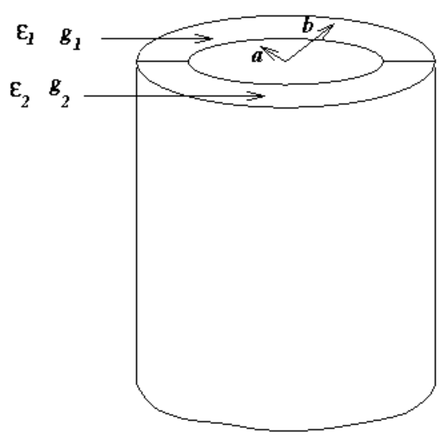

Figura 1: *Cable coaxial*

Solucion 1
a) En régimen permanente, toda la corriente que entra en un medio conductor (ya sea conductor perfecto o imperfecto), sale del mismo medio, por lo tanto, las ecuaciones que se cumplen son:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \\ \vec{J} &= g\vec{E} \end{aligned}$$

El problema presente es determinar el campo electrico $\vec{E}$ en el medio conductor. De las relaciones anteriores se tiene,

$$\vec{\nabla} \cdot (g\vec{E}) = 0.$$

La otra relacion importante es que el campo es estático, es decir

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0,$$

que equivale a $\vec{E} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$. Juntando todo esto,

$$\vec{\nabla} \cdot (g\vec{\nabla}\phi) = 0.$$

Si el medio conductor es homogeneo, entonces se satisface la ecuacion de Laplace, lo cual permite utilizar analogias electrostaticas en problemas con medios conductores en regimen permanente (teorema de unicidad).

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0.$$

Podemos suponer que tanto el potencial como el campo eléctrico tienen simetría cilíndrica, $\vec{E} = E(r)\hat{r}$, en que r es la distancia al eje z, y $\hat{r}$ el vector unitario radial. Por lo tanto, la ecuacion de Laplace toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial \phi}{\partial r}) = 0$$

Esta ecuacion tiene como solucion:

$$\phi(r) = K_1 \ln(r) + K_2$$

Para calcular las constantes imponemos las condiciones de borde

$$\phi(r = a) = K_1 \ln(a) + K_2 = V$$
$$\phi(r = b) = K_1 \ln(a) + K_2 = 0$$

Resolviendo este sistema se obtiene

$$\phi(r) = \frac{V}{\ln(\frac{a}{b})} \ln(\frac{r}{b})$$

Con esto, el campo electrico es:

$$\vec{E} = \frac{V}{\ln(\frac{b}{a})r}\hat{r}$$

b) Para determinar la resistencia R debemos calcular la corriente total que fluye de un cnductor al otro, para esto, debemos calcular la corriente total que sale del conductor interior y llega al conductor exterior. Esta corriente total se divide en dos corrientes distintas, dadas por su densidad de corriente $\vec{J}$

$$\vec{J}_1 = \frac{g_1 V}{\ln(\frac{b}{a})r}\hat{r}$$

$$\vec{J}_2 = \frac{g_2 V}{\ln(\frac{b}{a})r}\hat{r}$$

Ahora tomamos una superficie cilindrica (solo el manto) de radio a (podria ser cualquier otro radio entre a y b, bastaria con evaluar $\vec{J}$ para ese radio) y calculamos el flujo de corriente a travez de ella para los dos medios distintos

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\pi V_0}{ln\,[b/a]}(g_1 + g_2)L.$$

De acuerdo con esto, la resistencia debida a los medios conductores (1) y (2) es

$$R = \frac{ln\,[b/a]}{\pi L(g_1 + g_2)}.$$

Es evidente, de la disposición geométrica, que este resultado puede interpretarse como la combinación en paralelo de los medios (1) y (2). En efecto, notamos que las resistencias de cada medio por separado, R1, y R2, respectivamente, son

$$R_1 = \frac{ln\,[b/a]}{\pi L g_1}.$$

$$R_2 = \frac{ln\,[b/a]}{\pi L g_2}.$$

Con esto, es claro que se cumple la relación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

que indica que se trata efectivamente de una combinación en paralelo.

Pregunta 2

Se tiene una argolla muy delgada, de radio interior a y exterior b, a la que se ha cortado un trozo, de ángulo α. La argolla está hecha de un material de conductividad g, y sus extremos están terminados en dos placas muy delgadas hechas de conductor ideal, las que son mantenidas a una diferencia de potencial V_0, por medio de una batería.

a) Determine la densidad de corriente $\vec{J}$, el campo eléctrico $\vec{E}$, y el potencial $V(\vec{r})$, dentro de la argolla . Suponga que el potencial electrostático depende sólamente de la coordenada angular ϕ.

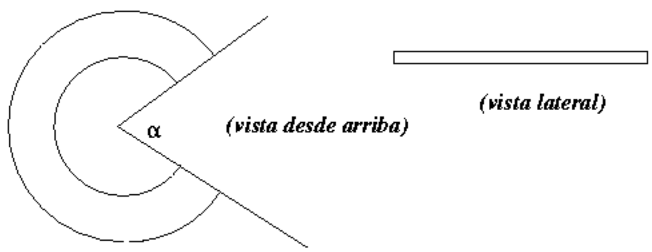

Figura 2: *dibujo de la argolla*

Solucion 2

a) Nuevamente, como en el caso anterior, nos intereza ver que ocurre cuando la corriente ya esta fluyendo hace un buen rato, es decir, nos intereza el regimen permanente de la situacion, cuando ya se ha establecido un equilibrio. Bajo esta situacion, podemos utilizar la ecuacion de Laplace en la region de la argolla (debido a que es homogenea y no hay crgas libres) Podemos suponer ademas ,que el potencial $V = V(\phi)$, y por lo tanto la corriente fluye en la dirección contraria a los punteros del reloj (aquí suponemos que V(0) = 0, y $V(2\pi-\alpha) = V_))$.
La ecuación de Laplace se convierte simplemente en

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0,$$

cuya solución, con las condiciones de borde indicadas, es

$$V(\phi) = \frac{V_0}{(2\pi - \alpha)}\phi.$$

Por lo tanto, el campo eléctrico y la corriente son:

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{(2\pi - \alpha)r}\hat{\phi}$$

$$\vec{J} = -\frac{gV_0}{(2\pi - \alpha)r}\hat{\phi}$$