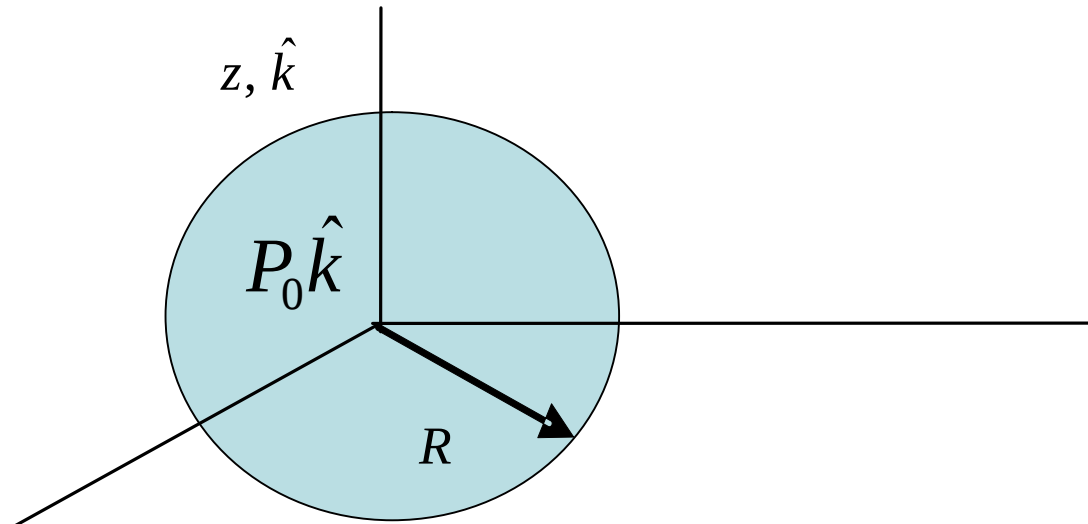


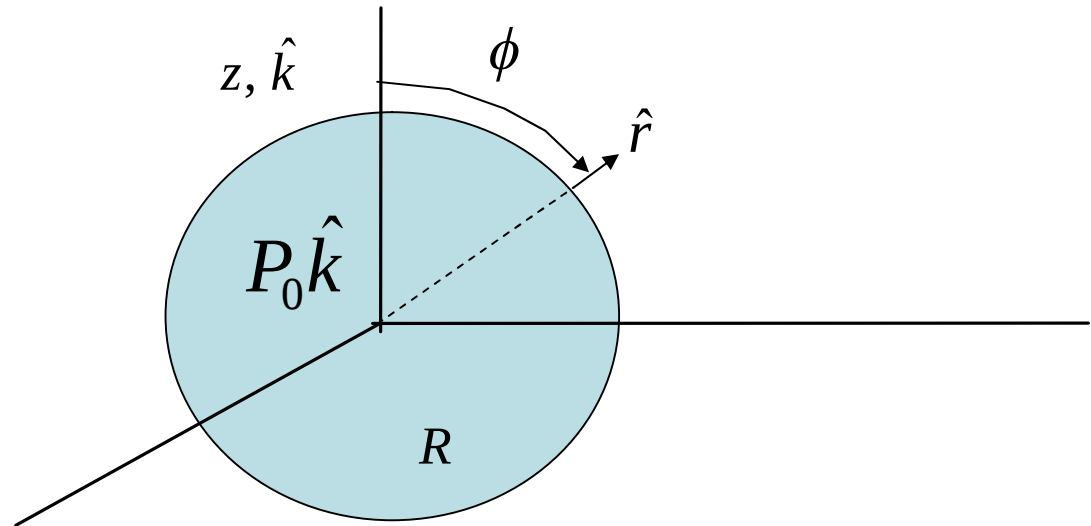
- Cargas de polarización.
- Encontrar el potencial en todo el espacio,
- Campos eléctrico y de desplazamiento en todo el espacio.



- Cargas de polarización.

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$$

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = P_0 \hat{k} \cdot \hat{r} = P_0 \cos \phi$$

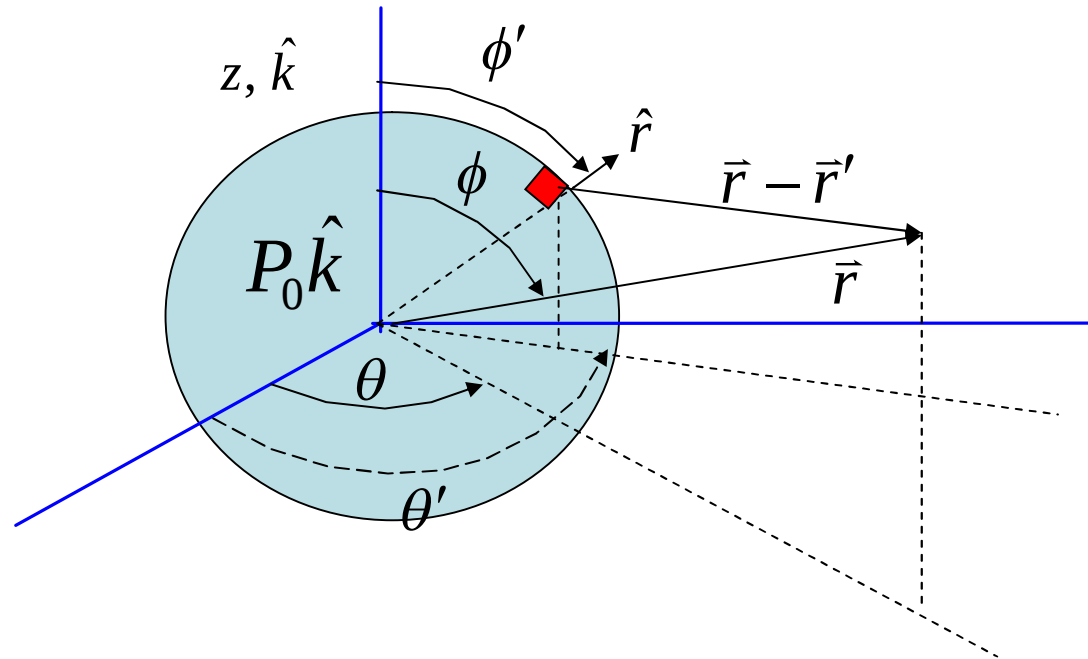


- Encontrar el potencial en todo el espacio,.

$$\sigma_P = P_0 \cos \phi'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{dq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_P R \sin \phi' d\theta' d\phi'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$



- Encontrar el potencial en todo el espacio,.

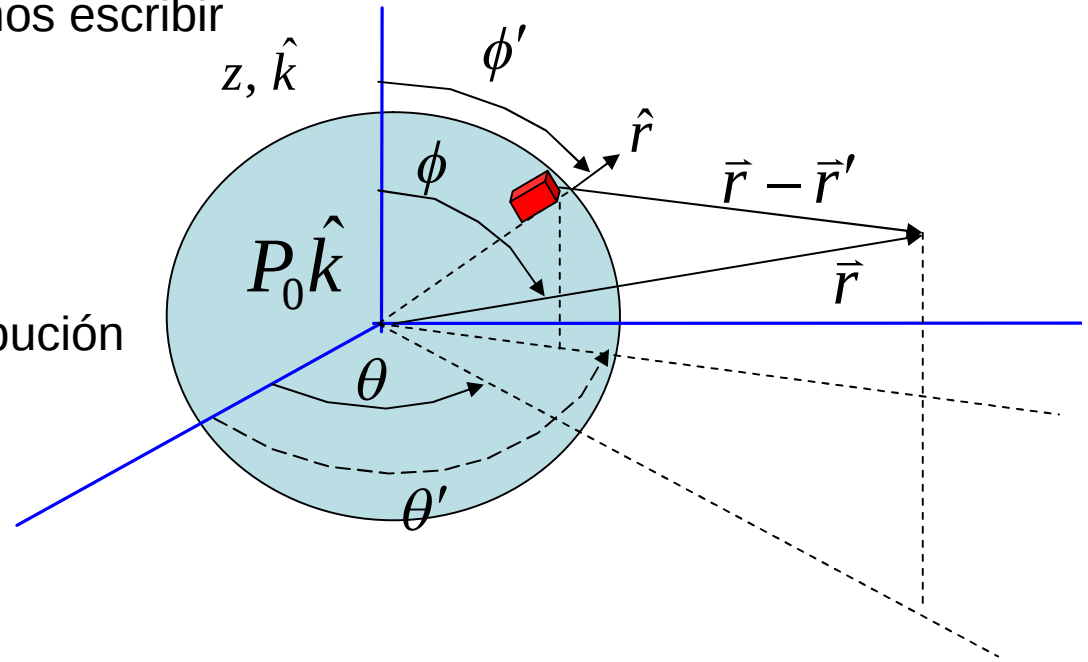
El potencial de un material con polarización $\vec{P}$ es.
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{P} \bullet (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'$$

Como $\vec{P} = P_0 \hat{k}$ es constante podemos escribir

$$V(\vec{r}) = \vec{P} \bullet \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv' \right)$$

Por otra parte, el campo de una distribución de carga en volumen es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'$$



Comparando estas dos expresiones, concluimos que la integral del lado derecho del potencial es exactamente el valor del campo que produce una carga uniforme de valor $\rho(\vec{r}) = 1$

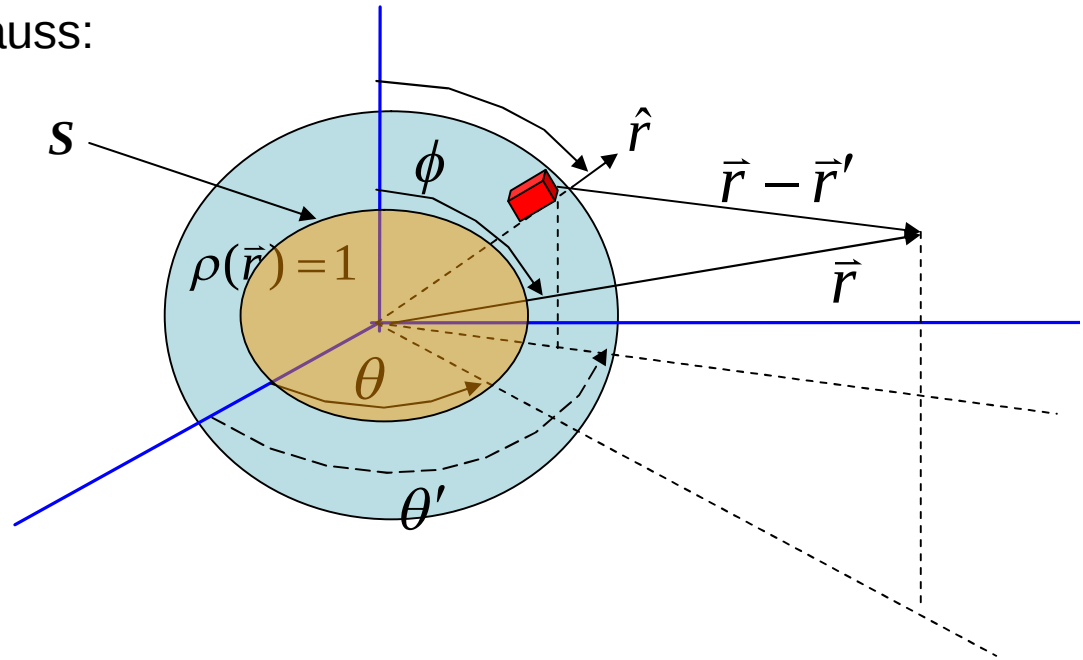
Calculemos este campo:

Calculemos este campo usando Gauss:

$$\text{I) } r < R: \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \times 1$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{r}$$



II) $r > R$:

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \times 1$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$$

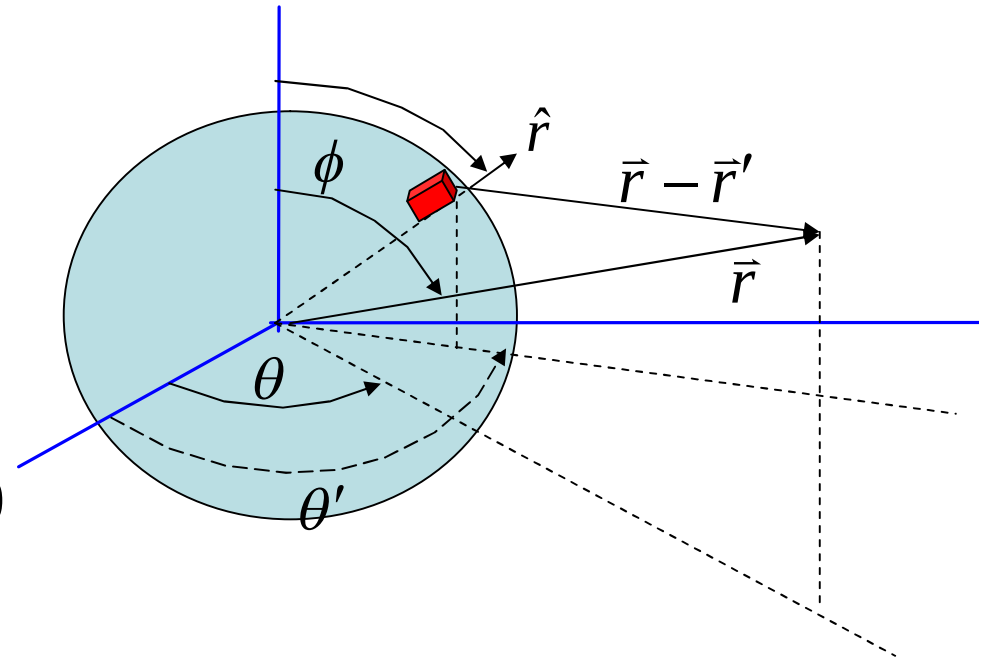
$$V(\vec{r}) = \vec{P} \bullet \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv' \right)$$

Luego el potencial vale:

$$\text{I) } r < R: V(\vec{r}) = \vec{P} \bullet \left(\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{r} \right)$$

$$V(\vec{r}) = P_0 \hat{k} \bullet \frac{1}{3\epsilon_0} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{P_0}{3\epsilon_0} z$$



II) $r > R$:

$$V(\vec{r}) = \vec{P} \bullet \left(\frac{R^3}{3\epsilon_0 \|\vec{r}\|^3} \vec{r} \right)$$

$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} z$$

$$V(\vec{r}) = P_0 \hat{k} \bullet \frac{R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

- Campos eléctrico y de desplazamiento en todo el espacio.

l) $r < R$:

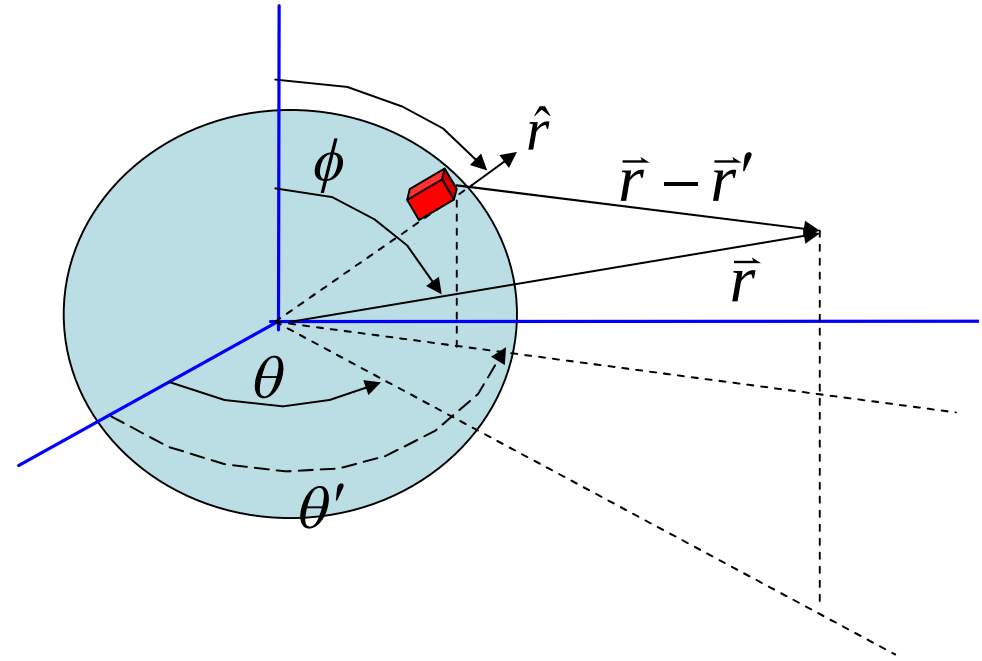
$$V(\vec{r}) = \frac{P_0}{3\epsilon_0} z$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_0}{3\epsilon_0} z \right) \hat{k}$$

$$\therefore \vec{E} = -\frac{P_0}{3\epsilon_0} \hat{k}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = -\epsilon_0 \frac{P_0}{3\epsilon_0} \hat{k} + P_0 \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{2P_0}{3\epsilon_0} \hat{k}$$

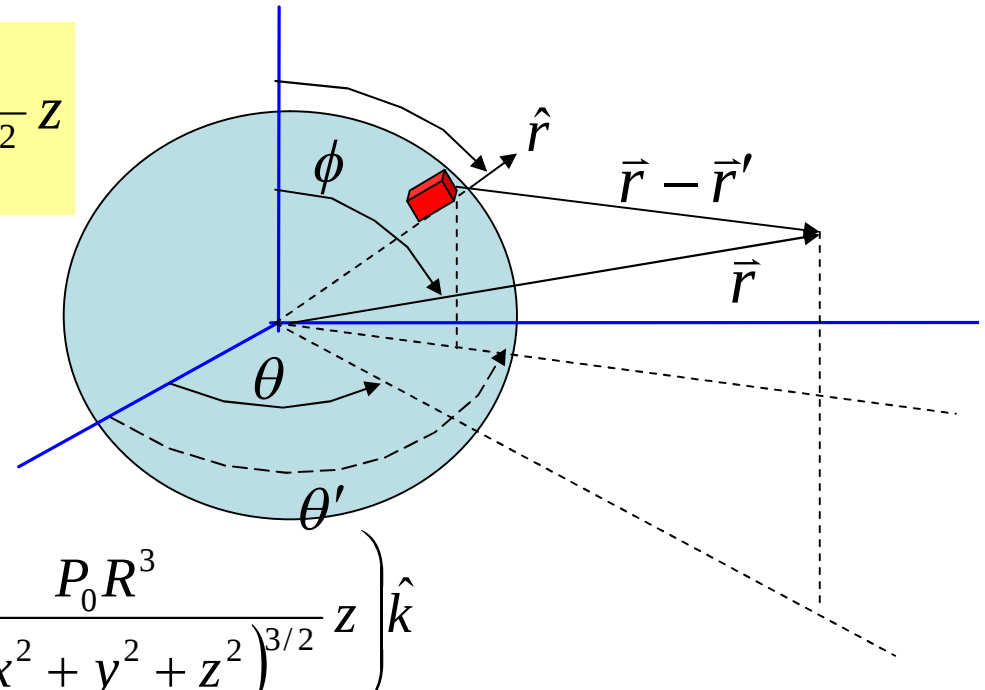


- Campos eléctrico y de desplazamiento en todo el espacio.

II) $r > R$:

$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} z$$

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\nabla V = & -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} z \right) \hat{i} \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} z \right) \hat{j} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} z \right) \hat{k} \end{aligned}$$



Se obtiene finalmente

$$\vec{E} = \frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0 r^5} (3z\vec{r} - r^2\hat{k})$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \frac{P_0 R^3}{3r^5} (3z\vec{r} - r^2\hat{k})$$