Pauta Control 1 FI33A
Otoño 2008

Prof. auxiliar: Luis Sánchez L

Problema 1
parte a
Supongamos que el material se encuentra en la zona lineal. Aca se cumple la ecuacion de Laplace debido a que no hay densidad de carga libre en la region definida por el dielectrico.
Veamos que pasa cuando en material esta saturado.
La relacion $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ siempre se cumple, en particular se cumple para $|\vec{E}| > E_0$, quedando de la forma:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_0$$

Ademas, tenemos las ecuaciones de maxwell que son:

$$Div(\vec{D}) = 0$$

$$Rot(\vec{E}) = 0$$

La segunda ecuacion, implica que existe un potencial ϕ tal que:

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

En la primera ecuacion reemplazamos $\vec{D}$

$$Div(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_0) = Div(\varepsilon_0 \vec{E}) = Div(-\varepsilon_0 \nabla \phi) = 0$$

Por lo tanto se cumple

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Es decir, en ambos casos, se cumple la ecuacion de Laplace. Para resolverla, despreciamos los efectos de borde, con lo cual nos permite suponer que $\phi = \phi(r)$ donde r es la distancia al eje del condensador (en coordenadas cilindricas). Entonces se tiene que:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial \phi}{\partial r}) = 0$$

Esta ecuacion tiene como solucion:

$$\phi(r) = K_1 \ln(r) + K_2$$

Para calcular las constantes imponemos las condiciones de borde

$$\phi(r = a) = K_1 \ln(a) + K_2 = V$$

$$\phi(r = b) = K_1 \ln(a) + K_2 = 0$$

Resolviendo este sistema se obtiene

$$\phi(r) = \frac{V}{\ln(\frac{a}{b})} \ln(\frac{r}{b})$$

Con esto, el campo electrico es:

$$\vec{E} = \frac{V}{\ln(\frac{b}{a})r}\hat{r}$$

El modulo del campo decrece a medida que crece r, por lo tanto, el material no se va a saturar todo al mismo tiempo. La region saturada va creciendo a medida que se aumenta el valor de V, es decir, en cada punto r, la saturacion se alcanza para un voltaje distinto. Ahora calculamos el valor de V que hace que todo el material este saturado. Esto ocurre cuando el campo en r=b alcanza en valor critico E_0 ya que en r=b es la ultima parte del material en alcanzar la saturacion.

$$E_0 = \frac{V_0}{\ln(\frac{b}{a})b}$$

$$\Rightarrow V_0 = E_0 b \ln(\frac{b}{a})$$

Este ultimo es el valor de V que hace que el material este completamente saturado
parte b
De la parte anterior, sabemos que el campo electrico en el dielectrico vale

$$\vec{E} = \frac{V}{\ln(\frac{b}{a})r}\hat{r}$$

Para el vector desplazamiento $\vec{D}$ tenemos dos casos distintos; Antes de la saturacion y despues de la saturacion.

Antes de la saturacion en el punto r:
En este caso estamos en la zona lineal, por lo tanto se cumple que:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \; con \; \varepsilon = \varepsilon_0(1 + X)$$

Con esto se tiene que:

$$\vec{D} = \frac{\varepsilon_0(1+X)V}{\ln(\frac{b}{a})r}\hat{r} \quad para \; V \leq E_0 r \ln(\frac{b}{a})$$

La expresion anterior debe ser entendida como una funcion de V, la cual es valida para cada punto r, con la restriccion que el voltaje V sea menor que el voltaje de saturacion de ese punto r.

Despues de la saturacion en el punto r
en este caso, se cumple que:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}_0 = \varepsilon_0\frac{V}{\ln(\frac{b}{a})r}\hat{r} + P_0\hat{r}$$

$$\vec{D} = (\varepsilon_0\frac{V}{\ln(\frac{b}{a})r} + P_0)\hat{r} \quad para \; V \geq E_0 r \ln(\frac{b}{a})$$

Ademas se puede notar que $\vec{D}$, visto como funcion de V, es continua en el punto donde se produce la saturacion. El voltaje de saturacion para un punto r cualquiera es $V = E_0 r \ln(\frac{b}{a})$ Al evaluar en este valor de V en ambas expresiones de D, se obtiene.

$$\vec{D}(V^-) = \varepsilon_0(1+X)E_0 = \varepsilon_0 E_0 + P_0$$
$$\vec{D}(V^+) = \varepsilon_0 E_0 + P_0$$

Problema 2

1. Las lineas del campo en las cercanias de la esfera son perpendiculares a la esfera y dentro de la esfera no hay debido a que el campo electrico en un conductor es cero

2. Si; si bien la carga total de la esfera es cero, los electrones del conductor tiene facilidad para moverse y reordenarse ante un campo electrico aplicado, por lo que estas cargas, al someter la esfera a dicho campo electrico uniforme, se mueven hasta alcanzar la condicion de equilibrio dentro del conductor($\vec{E} = 0$), por lo que aparece una densidad de carga distinta de cero en la superficie del conductor, manteniendo la carga total como cero.

3. Las cargas al reordenarse producen una densidad de carga sobre la superficie del conductor, el campo producido por dichas cargas es tal que anula el campo uniforme externo, por lo tanto, dicho campo es:

$$\vec{E} = -E_0\hat{k}$$