Solución Auxiliar N^{o} 4 FI33A

Prof. Auxiliar: F. L. Benavides

Fecha: Miércoles 9 de Abril de 2008

Problema 1

Para calcular el potencial eléctrico en todo el espacio es necesario obtener el campo eléctrico para todas las regiones del sistema. Poniendo el origen en la posición de la carga q, por casos, se obtiene: (Ojo que el dato es k permitividad relativa. Ella es tal que $\varepsilon_0 k = \varepsilon$ permitividad dieléctrica del material).

$r \leq a$;

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E(r) r^2 sen(\theta) d\theta d\phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$r > a$;

$$\overrightarrow{D}(r) = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}, \overrightarrow{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 k r^2}\hat{r}$$

El potencial eléctrico queda: (con la referencia de potencial nulo en el infinito)

$$-\int_{\infty}^{r} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dr} \Rightarrow$$

Si $r > a$,

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 k} \cdot -dr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 k}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 k r}$$

Si $r \leq a$,

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dr} = -\int_{\infty}^{a} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dr} - \int_{a}^{r} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dr} = -\int_{\infty}^{a} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot (-dr) - \int_{a}^{r} \frac{q}{4\pi k\varepsilon_0 r^2} \cdot (-dr) \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{ak} - \frac{1}{a} - \frac{1}{kr}\right)$$

Eso por un lado. Para demostrar el resultado que se pide en relación a las cargas inducidas, primero es necesario obtener el vector de polarización. De la definición, $\overrightarrow{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\overrightarrow{E}$, se llega a:

$$\overrightarrow{P}(r) = \begin{cases} \frac{q(k-1)}{4\pi k r^2}\hat{r} & r > a \\ 0 & r \leq a \end{cases}$$

De aquí que:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \overrightarrow{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(P \cdot r^2) = 0$$

$$\sigma_p = \left[\overrightarrow{P} \cdot \hat{n}\right]_{r=a} = -\frac{q(k-1)}{4\pi k a^2}$$

De ésta forma, al sumar la carga total de polarización superficial junto con la puntual en el origen, vemos que:

$$-\frac{q(k-1)}{k} + q = \frac{q}{k}$$

Es decir, la carga total no depende del radio, tal y como se deseaba probar.

Problema 2

Primero notamos que el campo eléctrico para $|x| > d$ es nulo. Esto pues, dada la descripción del sistema, la diferencia de potencial entre cualquier par de puntos al lado izquierdo o derecho del eje es cero, i.e., no puede haber campo. En general, cuando hay planos infinitos se asume éste resultado, que no depende del tipo de dieléctrico que haya entre medio. Puede probarse más detalladamente calculando los efectos producidos por cada conductor cargado, y luego sumando. La idea teórica detrás de ésto es que una línea de campo nunca es abierta, todas parten y terminan en cargas, (positivas y negativas respectivamente). Si hubiese líneas de campo hacia la derecha o izquierda, tendrían que devolverse en el infinito, pero dado que son rectas, (pues los conductores son infinitos), ésto no puede ocurrir.

a) Por ley de Gauss, utilizando una superficie cerrada cilíndrica entre el medio de la derecha, la placa conductora con carga $+\sigma$, $(x = d)$, y el medio en cuestión, sólo influye la cara del cilindro que queda encerrada en $x < d$. (El manto tiene normal perpendicular y el campo para $x > d$ es nulo). Entonces,

$$\int \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{dS} = \int \sigma dS \Rightarrow -D\triangle S = \sigma\triangle S \Rightarrow \overrightarrow{D} = -\sigma\hat{i} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{E}(x) = \begin{cases} \frac{-\sigma}{4\varepsilon_0}\left[\left(\frac{x}{d}\right)^2+1\right]\hat{i} & |x|<d \\ 0 & |x|>d \end{cases}$$

b) Para la función potencial, calcularemos primero dentro del dieléctrico, y luego concluiremos para todo el espacio. Así,

$|x| < d$,

$$V(x) = -\int_{-d}^{x} \frac{-\sigma}{4\varepsilon_0}\left[\left(\frac{x}{d}\right)^2+1\right]dx = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left[\frac{1}{d^2}\left(\frac{x^3+d^3}{3}\right)+(x+d)\right]$$

$$\therefore V(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left[\frac{1}{d^2}\left(\frac{x^3+d^3}{3}\right)+(x+d)\right] & |x|<d \\ V_0 & x>d \\ 0 & x<d \end{cases}$$

c) Las densidades de carga superficial son iguales en magnitud y opuestas en signo. Basta que igualemos el potencial en $x = d$ con las dos expresiones que se tienen, y se despeja la densidad superficial. Ojo, que el campo no está definido para $x = d$, no así el potencial, que es la integral del primero. Como la discontinuidad es finita, no hay complicaciones.

$$\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left[\frac{1}{d^2}\left(\frac{d^3+d^3}{3}\right)+(d+d)\right] = V_0 \Rightarrow \sigma = \frac{3V_0\varepsilon_0}{2d}$$

(Para $-\sigma$ basta cambiar el signo).

d) El vector polarización queda de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{P} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\overrightarrow{E} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{P}(x) = \begin{cases} \frac{-\sigma}{\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{4}\left(\left(\frac{x}{d}\right)^2+1\right) & |x|<d \\ 0 & |x|>d \end{cases}$$

e) Las densidades de carga de polarización quedan de la siguiente forma:

$$\rho_p = -\nabla\cdot\overrightarrow{P} = -\frac{\sigma x}{2d^2}$$

$$\sigma_p = \overrightarrow{P} \cdot \hat{n} = \sigma \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right)$$

Donde el σ_p calculado corresponde al efecto a la derecha. (A la izquierda es simplemente el mismo, con signo contrario, pues las normales son opuestas.

Problema 3

Éste problema queda propuesto puesto que es simplemente ilustrativo respecto de las aplicaciones de la teoría estudiada a la realidad. Para el cálculo de la energía del electrón, se propone simplemente realizar:

$$E = \frac{1}{2} \int \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{D} dV$$

Donde los vectores campo y desplazamiento eléctrico son muy sencillos de calcular, para la carga q dada. Luego, la idea es comparar el valor según consideraciones relativistas, teóricas, de $10^{-13}[J]$, para un electrón, y con ello estimar el orden de magnitud de su radio.