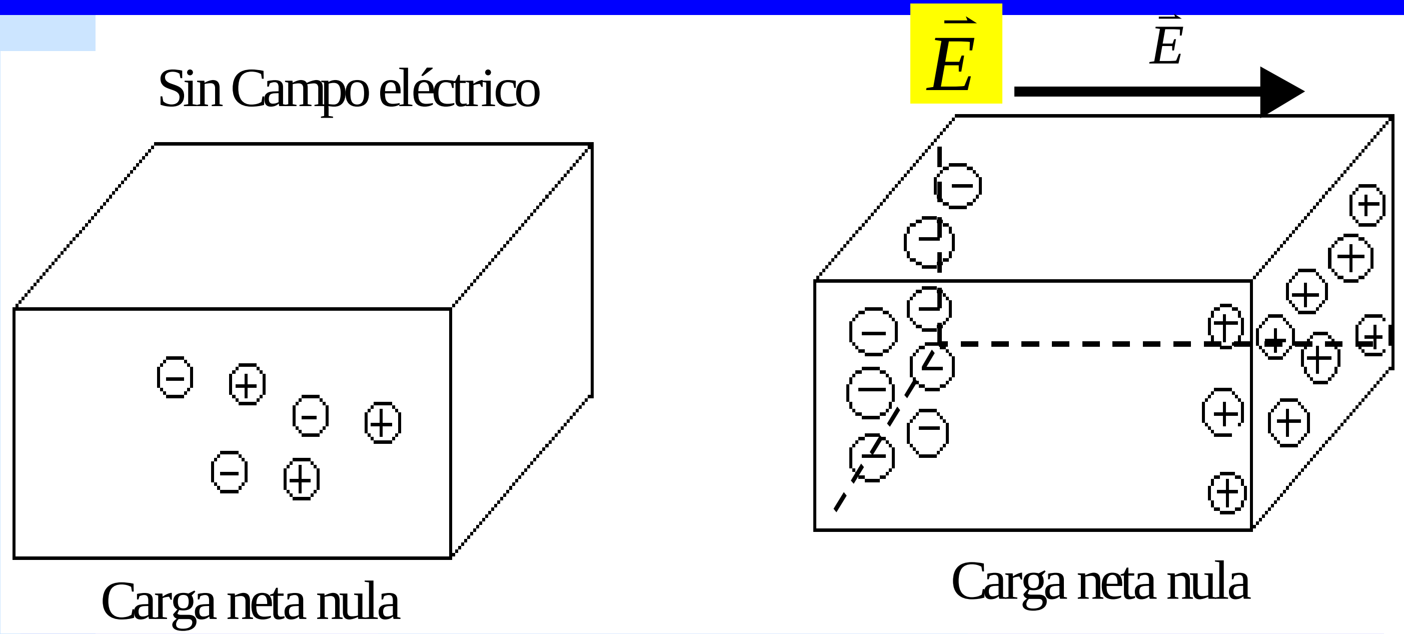
FI33A ELECTROMAGNETISMO
Clase 10
Conductores en Electrostática-II

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

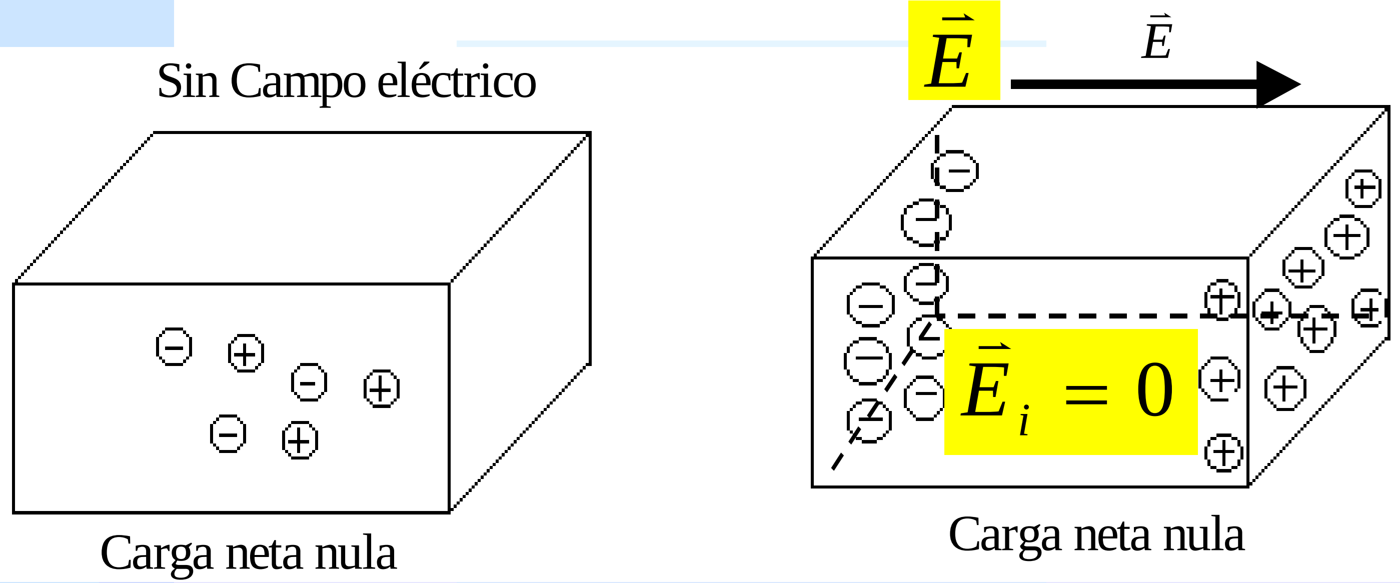
Modelo Básico de Conductores



- Abundantes cargas positivas y negativas
- Pueden moverse libremente en presencia de un campo eléctrico

Estado de Equilibrio ⟹ **Campo eléctrico nulo en el interior**

Propiedades



Para el Estado de Equilibrio electrostático se cumple:

1. La carga sólo se redistribuye en la superficie

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho_l = 0$$

Propiedades

2. Toda la superficie del conductor es una superficie equipotencial

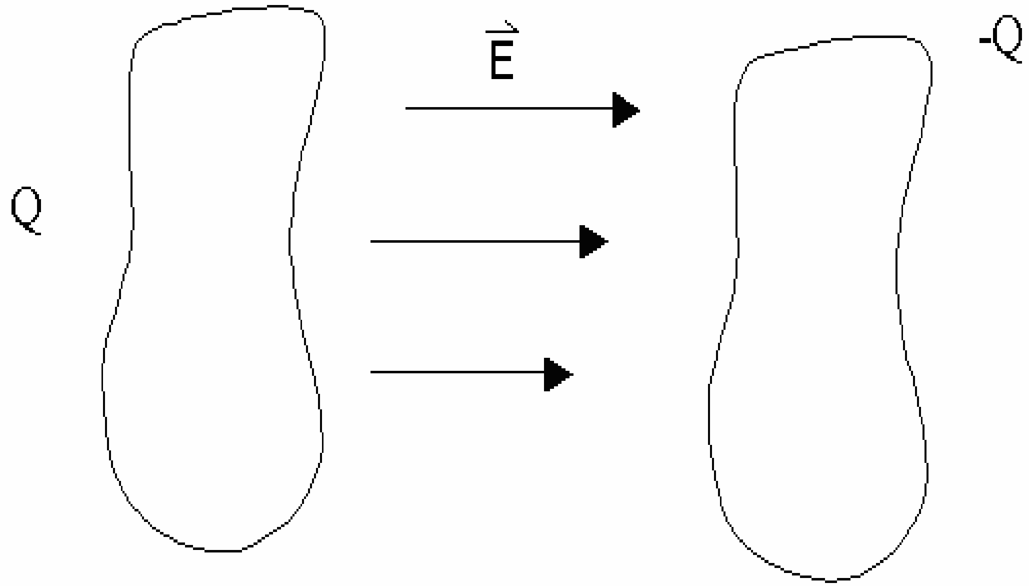
$$\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

No existe diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera al interior del conductor

3. El campo eléctrico inmediatamente afuera del conductor es normal a la superficie del conductor

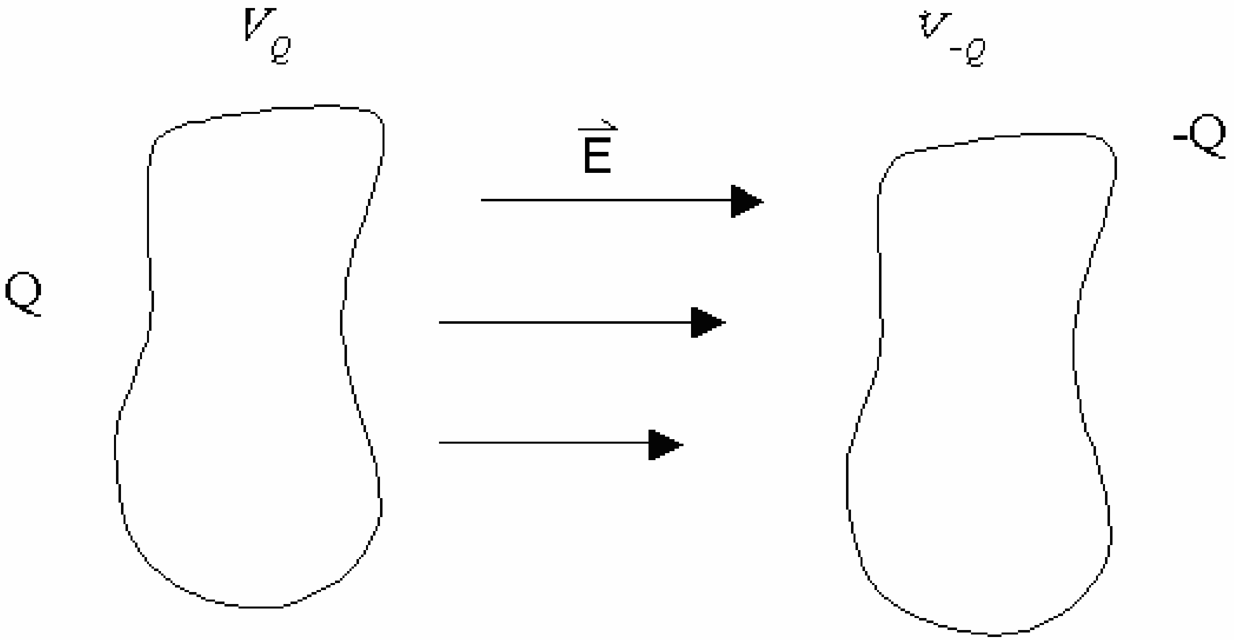
$$D_n = \varepsilon_0 E_n \quad \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$$

Condensadores



Sistema de dos conductores en donde la carga de uno de ellos es de igual magnitud pero de signo contrario al otro.

Condensadores



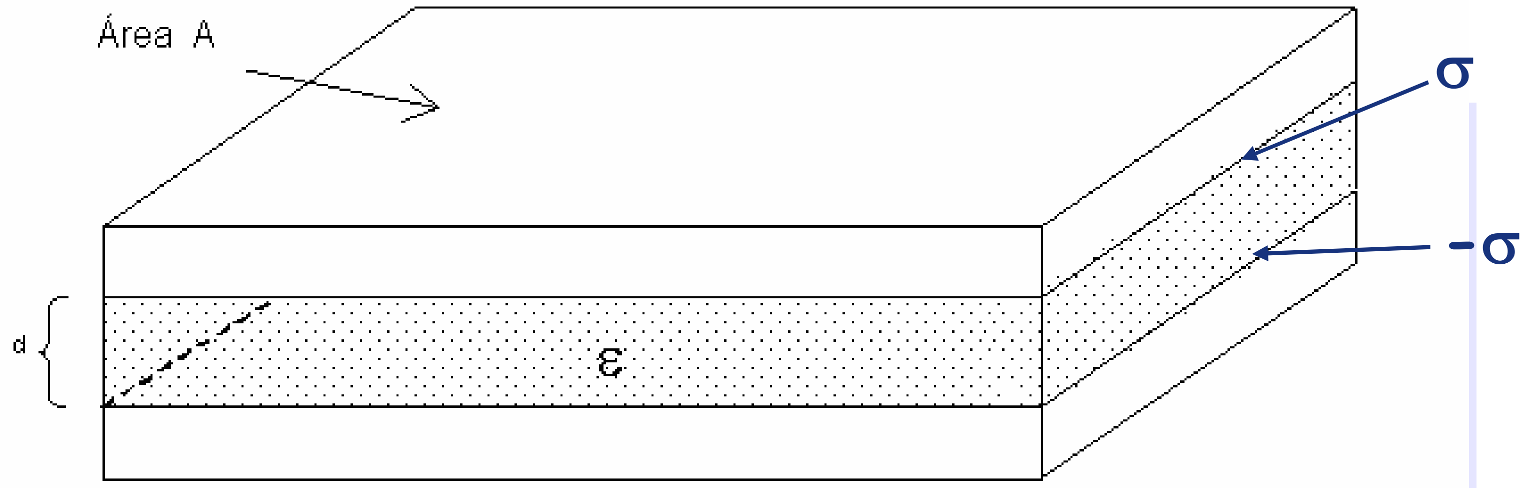
$$V_Q > V_{-Q}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_Q - V_{-Q}} > 0$$

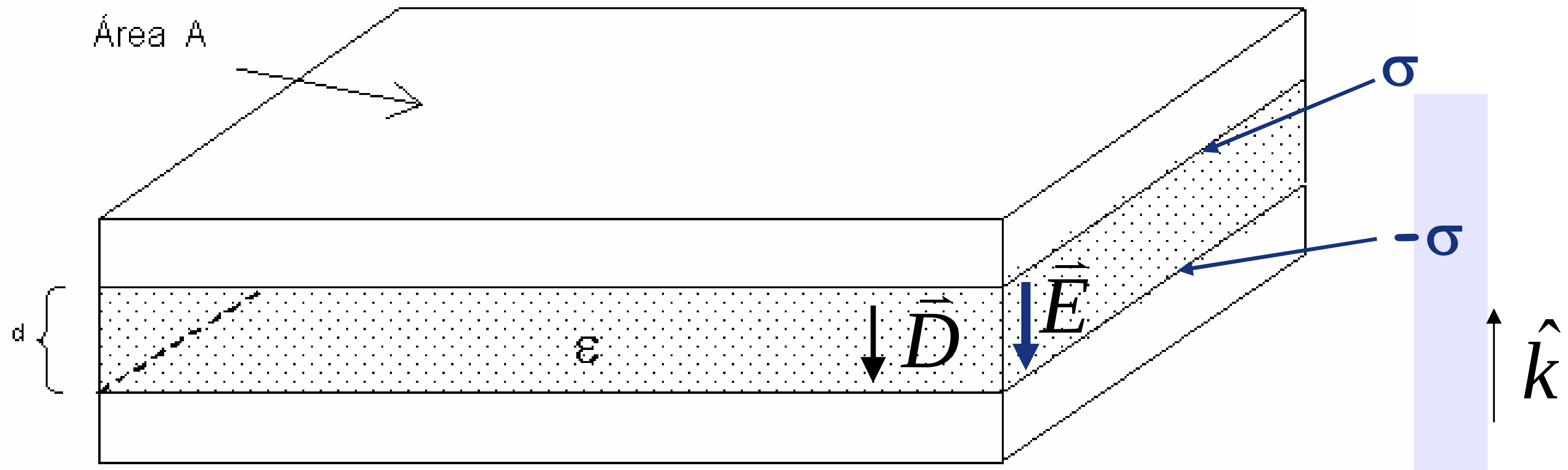
Se caracteriza a través de su capacidad C

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V}$$

Ejemplo



Ejemplo



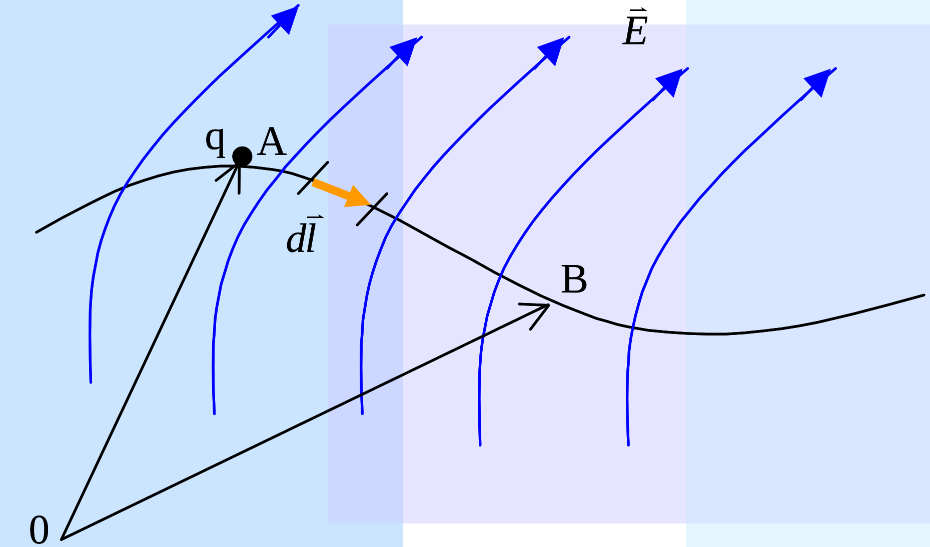
$$\vec{D} = -\sigma\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{k} \Rightarrow \quad -\int_{-d}^{0} \vec{E}\bullet d\vec{l} = V_{\sigma} - V_{-\sigma} \quad \Rightarrow \overbrace{V_{\sigma} - V_{-\sigma}}^{\Delta V} = \frac{\sigma}{\varepsilon}d$$

$$Q = \sigma A \ y \ \Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon}d, \quad luego \quad C = \frac{\sigma A}{\sigma\frac{d}{\varepsilon}} \Rightarrow C = \varepsilon\frac{A}{d}$$

Menor d ⇒mayor C,
Mayor A⇒ mayor C,
Mayor ε ⇒ mayor C.

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Recordemos el concepto de potencial



$$V_{AB} = V_A - V_B = \frac{W}{q} = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$W = \int_A^B dW = -q \underbrace{\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}}_{V_{AB}}$$

Notar que si B esta en el infinito y lo tomamos como referencia $V_B = 0$

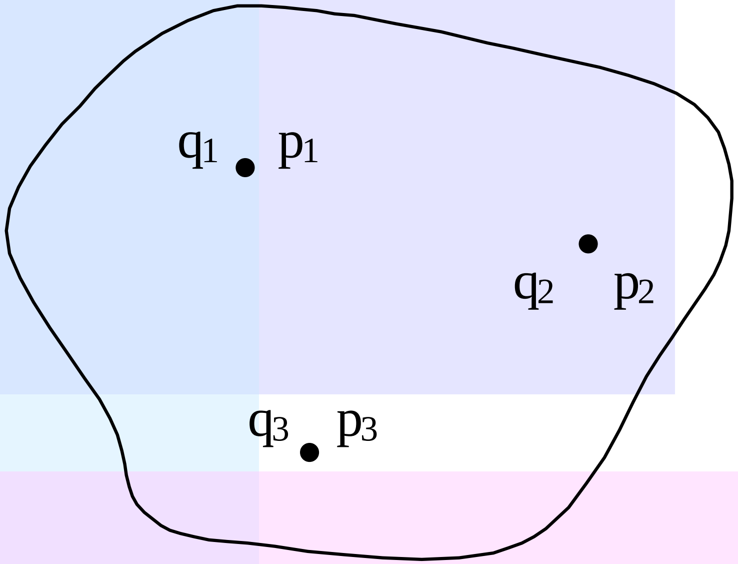
$$W = qV_A$$

Es el trabajo para traer la carga q desde el infinito al punto A.

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

La energía electrostática de un sistema de partículas es el trabajo necesario para formar dicho sistema $\Rightarrow$ $W=U$.

Caso sistema de 3 cargas



Recordar que:

- El campo es conservativo
- Campos cumplen con superposición

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para la primera carga no es necesario realizar trabajo

$$W_1 = 0$$

$q_1 \bullet p_1$

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para la Segunda carga

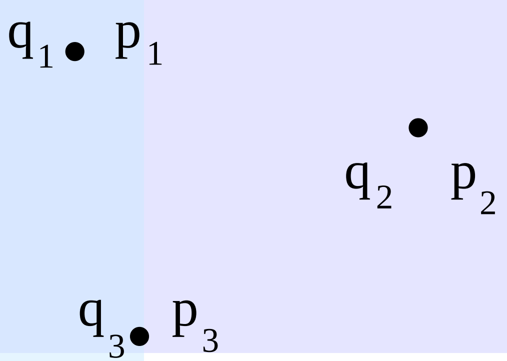
$$W_2 = q_2 V_{21}$$

V_{21} es el potencial producido por la carga 1 en la posición P_2

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para traer la 3ª carga

$$W_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$



V_{31} es el potencial producido por la carga 1 en la posición P_3

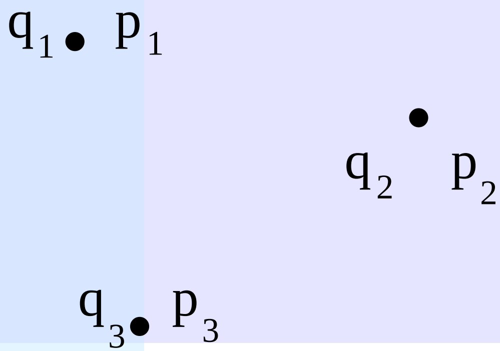
V_{32} es el potencial producido por la carga 2 en la posición P_3

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

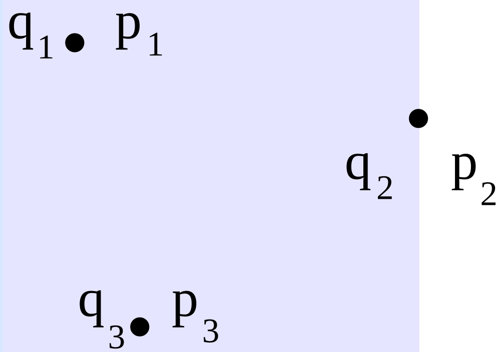
Luego el trabajo total es

$$W = 0 + W_2 + W_3 = q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$



ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito



Si invertimos el orden, primero traemos la carga 3, luego la 2 y finalmente la 1 se tiene:

$$W' = \underbrace{0}_{\substack{\text{Trabajo}\\ \text{carga 3}}} + \underbrace{q_2 V_{23}}_{\substack{\text{Trabajo}\\ \text{carga 2}}} + \underbrace{q_1 V_{13} + q_1 V_{12}}_{\substack{\text{Trabajo}\\ \text{carga 1}}}$$

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

$W = q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$ y $W' = 0 + q_2 V_{23} + q_1 V_{13} + q_1 V_{12}$

Trabajo es el mismo independiente del orden, luego

$$W' = W$$

q$_1$ • p$_1$

q$_2$ • p$_2$

q$_3$ • p$_3$

Sumando

$$\Rightarrow 2W = q_1 \underbrace{(V_{13} + V_{12})}_{\textit{potencial en } 1} + q_2 \underbrace{(V_{21} + V_{23})}_{\textit{potencial en } 2} + q_3 \underbrace{(V_{31} + V_{32})}_{\textit{potencial en } 3}$$

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3\right)$$

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Para un sistema de n cargas se obtiene

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q_k V_k \qquad \text{en [J] joules}$$

para distribuciones continuas de carga se tiene
$\Sigma \to \int$ y $q \to dq$, con ello

$$W = \frac{1}{2}\int V(\vec{r})\,dq \qquad \text{en [J] joules}$$

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Para una distribución específica de carga tendremos

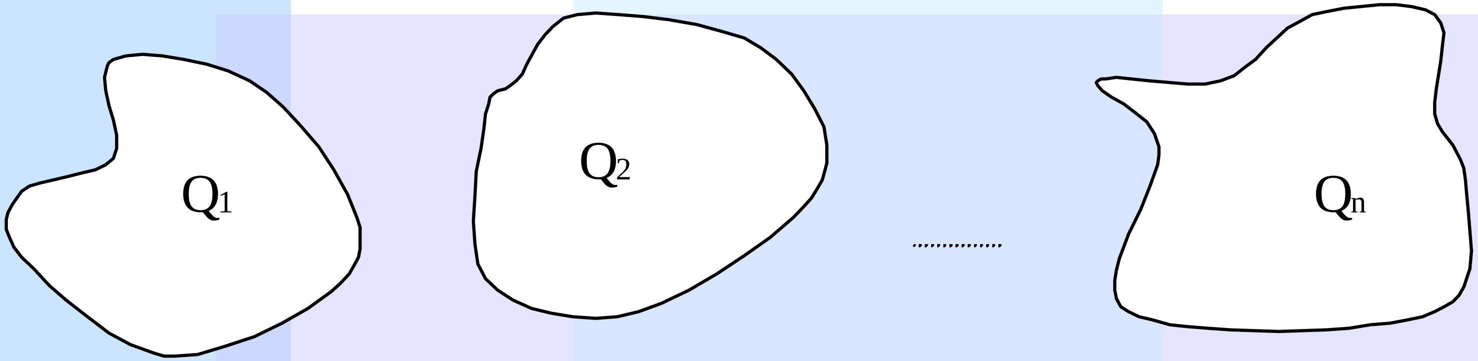
$$W = \frac{1}{2}\int \lambda(\vec{r})V(\vec{r})dr$$

$$W = \frac{1}{2}\iint \sigma(\vec{r})V(\vec{r})dS$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega} \rho(\vec{r})V(\vec{r})dv$$

Energía de un Sistema de Conductores

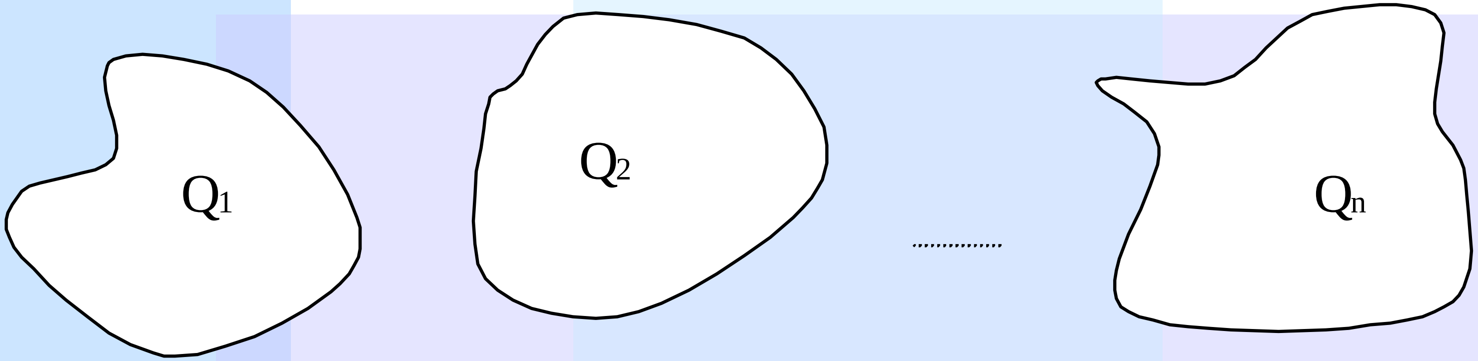
Consideremos n conductores cargados



¿Cuánta energía se gastó en formar este sistema?

Energía de un Sistema de Conductores

Solo hay carga en las superficies

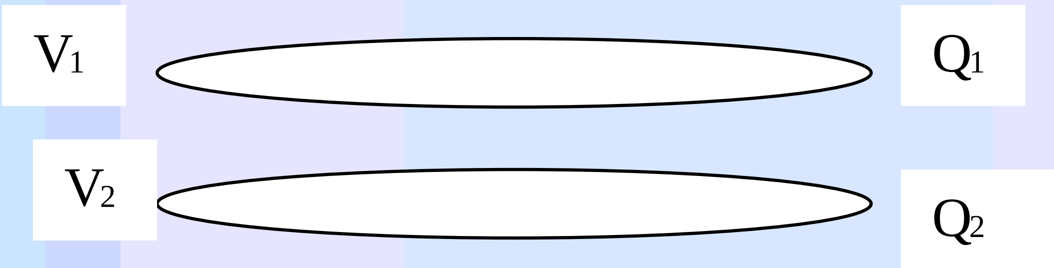


$$W = \underbrace{\frac{1}{2} V_1 \iint_{S_1} \sigma_1(\vec{r})\,dS}_{Q_1} + \underbrace{\frac{1}{2} V_2 \iint_{S_2} \sigma_2(\vec{r})\,dS}_{Q_2} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2} V_n \iint_{S_n} \sigma_n(\vec{r})\,dS}_{Q_n}$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} \sum V_i Q_i$$

Caso condensadores

Cada condensador tiene igual carga y de signo contrario



$$W=\frac{1}{2}\sum V_i Q_i \quad \Rightarrow \quad W=\frac{1}{2}(V_1Q_1+V_2Q_2)\Rightarrow \quad Q_2=-Q_1\Rightarrow W=\frac{1}{2}(V_1-V_2)Q_1$$

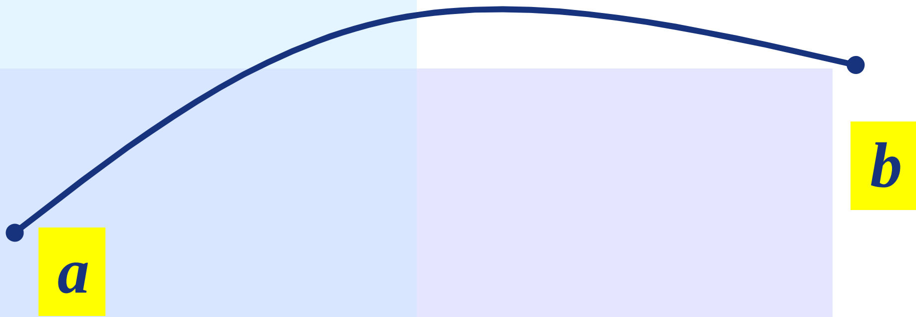
pero $Q=C\Delta V$

$$\Rightarrow W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \text{ó} \quad W=\frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

Fuerza Eléctrica y Energía

Trabajo entre dos puntos

$$W = -\int_a^b \vec{F} \bullet d\vec{l}$$



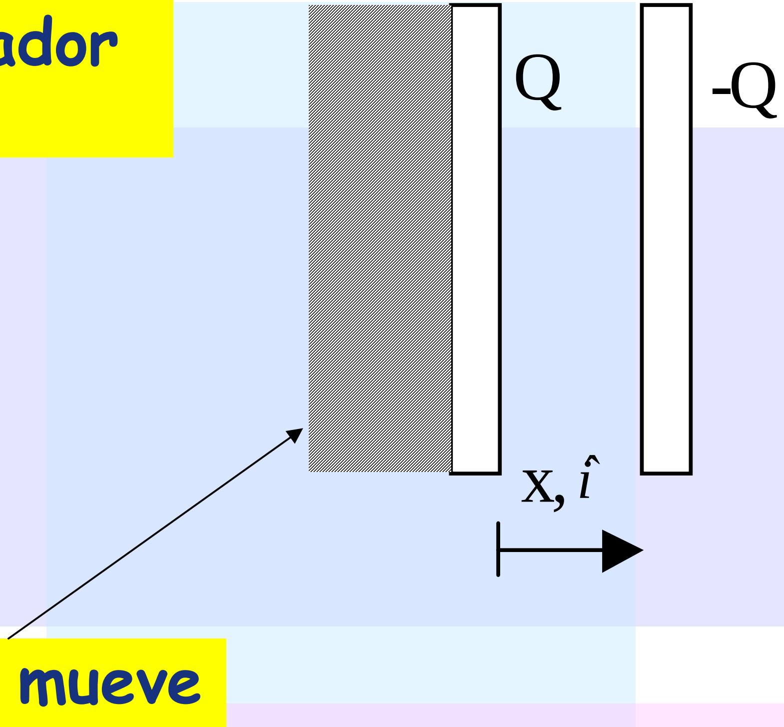
$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -\nabla W$$

Y el trabajo es igual al cambio de la energía eléctrica del sistema

Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo: Condensador de placas planas

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$



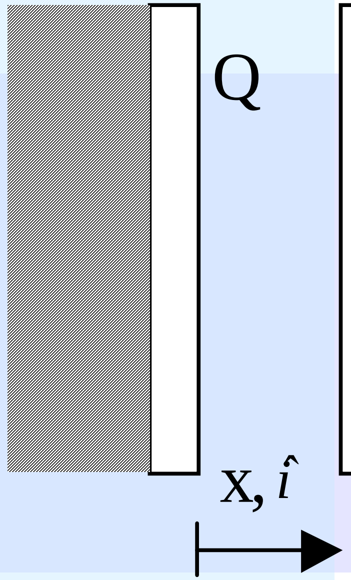
Al producirse el movimiento de atracción, la carga neta se mantiene constante (Q=constante)

Fuerza Eléctrica y Energía

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

La capacidad es función de la distancia x

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{x}$$



$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} x$$

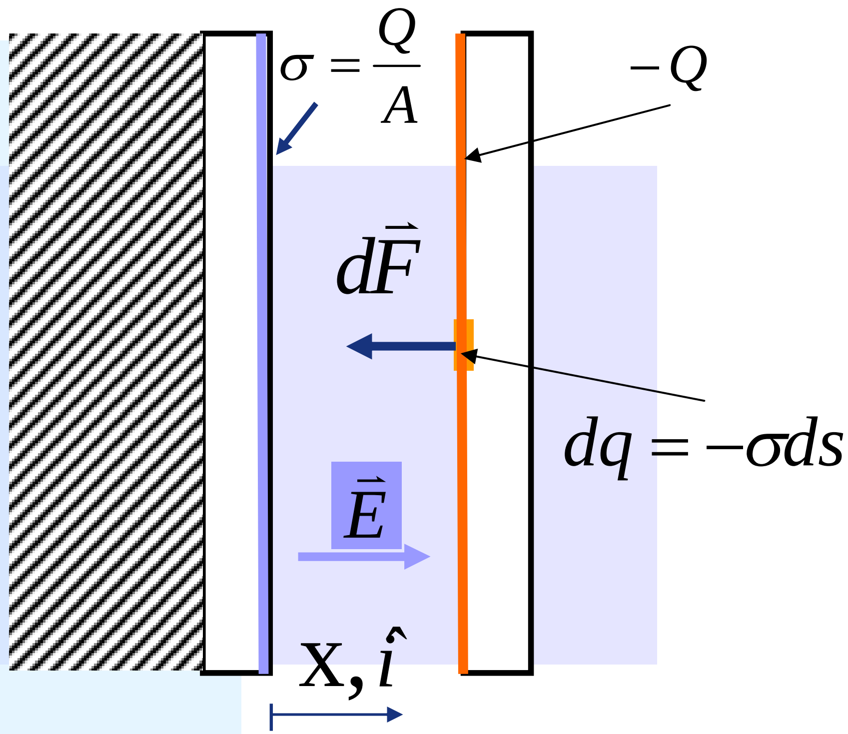
$$\vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial x}\hat{i} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}\hat{i}$$

Fuerza es independiente de la distancia x

Fuerza Eléctrica y Energía

Método alternativo

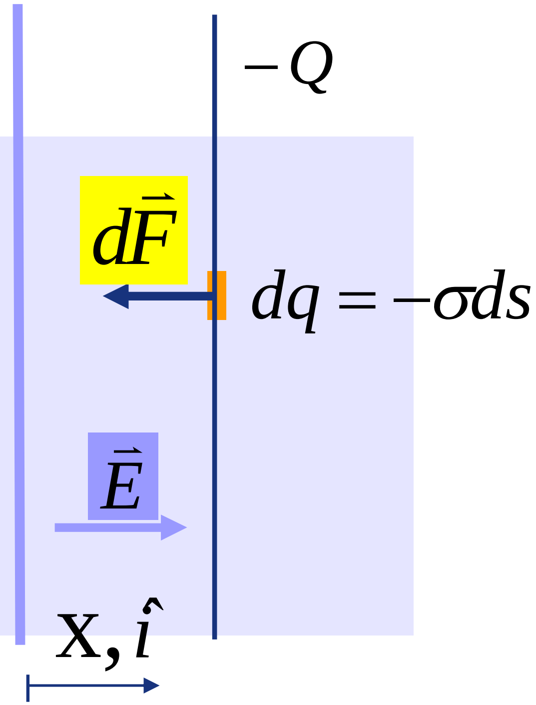
Fuerza producida por el campo de una placa sobre las cargas de la otra



Fuerza Eléctrica y Energía

Método alternativo

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$



Campo producido por placa con Q

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$$

Fuerza sobre elemento *dq* de otra placa con -Q

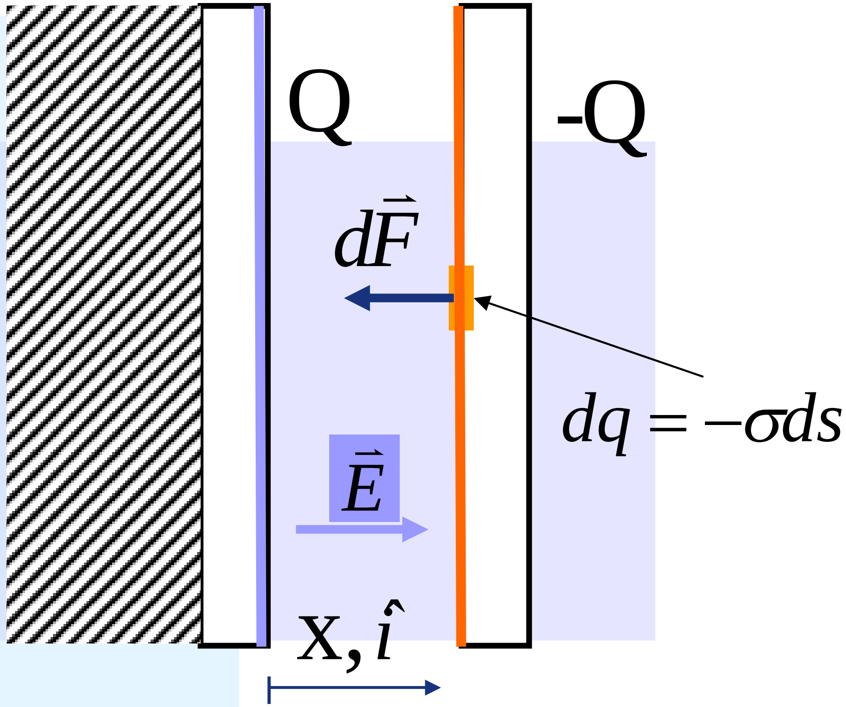
$$d\vec{F} = \vec{E}dq$$

Fuerza Eléctrica y Energía

Método alternativo

Fuerza producida por campo entre las placas

$$d\vec{F} = \vec{E}dq \qquad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$$



$$\vec{F} = \iint_A d\vec{F} = \iint_A \vec{E}dq = \iint_A \vec{E}(-\sigma)ds$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\iint_A \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}\sigma ds = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}A\hat{i} \qquad \Rightarrow \vec{F} = -\frac{(\sigma A)^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{i} \qquad \therefore \vec{F} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{i}$$

Fuerza es independiente de la distancia x

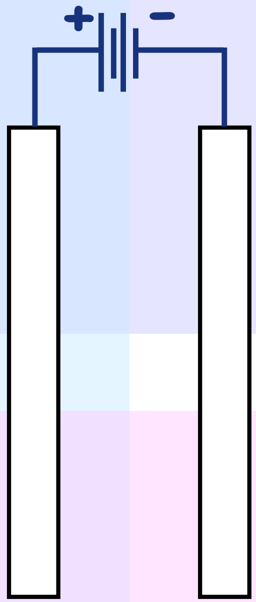
Fuerza electromotriz

¿Existen dispositivos capaces de mantener una diferencia de potencial entre dos conductores?

Si

Esto se logra mediante una fem o batería, la cual es un dispositivo que tiene la capacidad para mantener la diferencia de potencial constante entre sus bornes

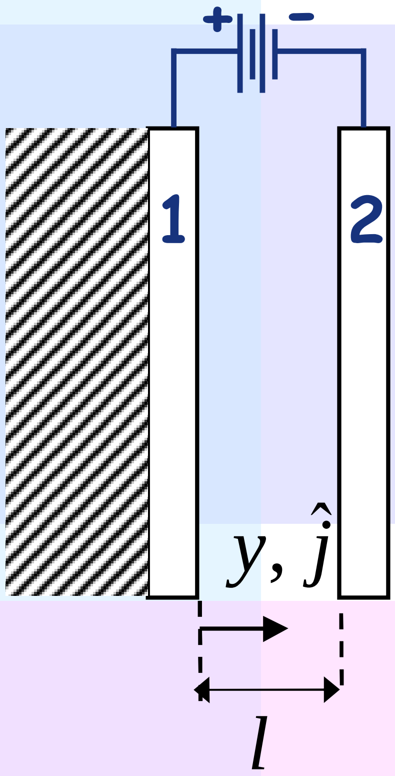
$$V_Q - V_{-Q} = \Delta V = V_0 \text{ [volts]}$$



Fuerza electromotriz

Volviendo al ejemplo tenemos

$$V_1 - V_2 = \Delta V = V_0 \quad \text{[volts]}$$



$$V_1 - V_2 = -\int_l^0 \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = V_0 = -E_0 y \,\Big|_l^0 = El$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{l}\hat{j}$$

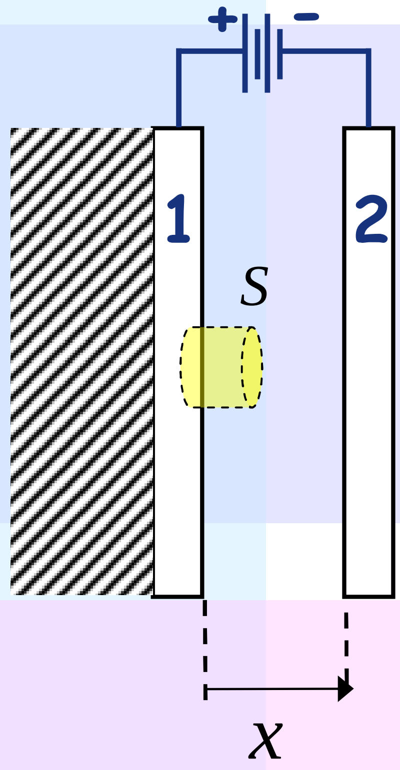
Notar que el campo es función de la distancia de separación entre las placas

Fuerza electromotriz

Hagamos $l=x$ variable

$$V_1 - V_2 = \Delta V = V_0 \quad \text{[volts]}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{x}\,\hat{j}$$



Usando la Ley de Gauss

$$\oiint_s \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0} \quad y \quad Q_T = \sigma \Delta S$$

$$\oiint_s \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{tapa} \frac{V_0}{x}\,\hat{j} \bullet ds\hat{j} = \frac{V_0}{x}\Delta S$$

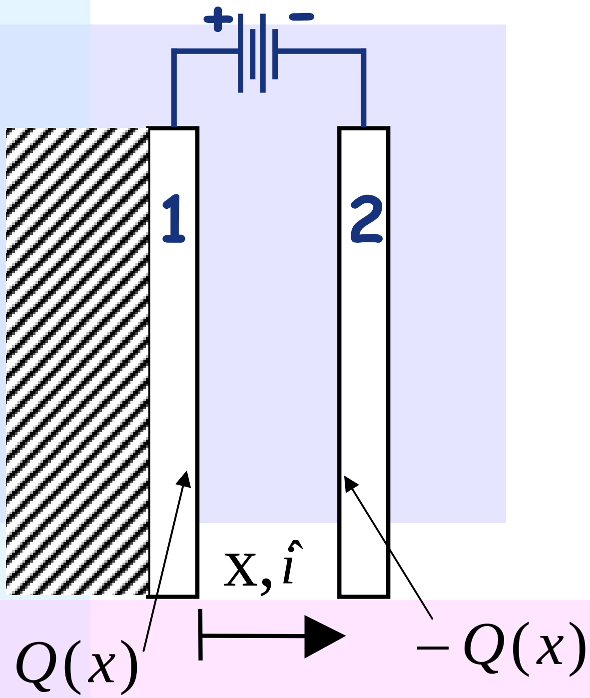
$$\Rightarrow \quad \frac{V_0}{x}\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} \qquad \therefore \sigma = \frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

Notar que $\sigma = \sigma(x)$

Fuerza electromotriz

$$V_1 - V_2 = \Delta V = V_0 \quad \text{[volts]}$$

$$\Delta V = V_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} x \Rightarrow \sigma(x) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$



La carga en los conductores es

$$Q(x) = A\frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

Si x varia, entonces la densidad de carga varia para satisfacer la condición de diferencia de potencial constante. Esta tarea la realiza la batería o fem.

Fuerza electromotriz

Calculemos nuevamente la fuerza producida entre las placas

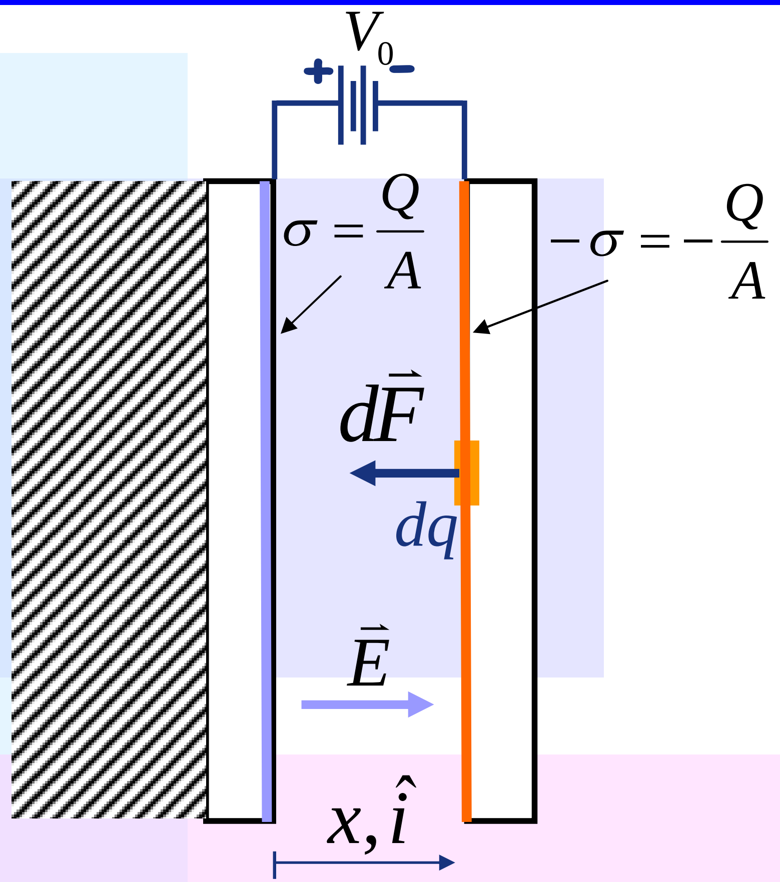
$$d\vec{F} = \vec{E}dq \qquad \vec{E} = \frac{\sigma(x)}{2\varepsilon_0}\hat{j}$$

$$\vec{F} = \iint_A d\vec{F} = \iint_A \vec{E}dq = \iint_A \vec{E}(-\sigma)ds$$

$$\vec{F} = -\iint_A \frac{V_0}{x}\hat{j}\sigma(x)\,dydz = -\frac{V_0\sigma(x)}{x}A\hat{j}$$

$$\sigma(x) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

$$\boxed{\therefore \quad \vec{F} = -\frac{\varepsilon_0 A V_0^2}{x^2}\hat{j}}$$



Fuerza es función de x

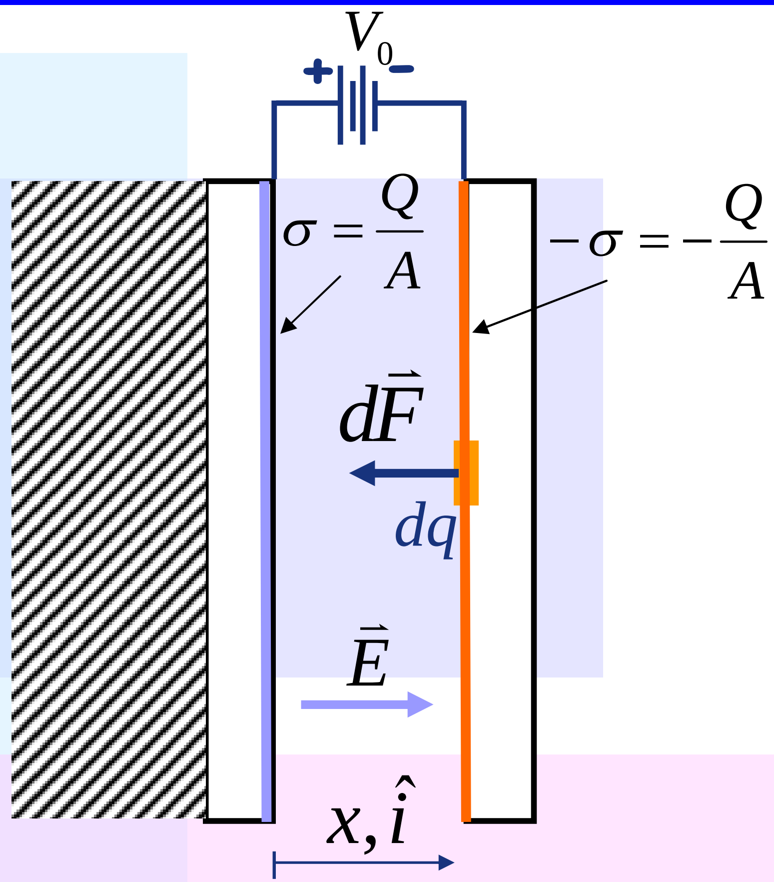
Fuerza electromotriz

Expresemos esto en términos de la carga

$$\vec{F} = -\frac{\varepsilon_0 A V_0^2}{x^2}\,\hat{j} \qquad \sigma(x) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

$$\vec{F} = -\frac{A\varepsilon_0 V_0}{x} \times \frac{A\varepsilon_0 V_0}{x} \times \frac{1}{A\varepsilon_0}\,\hat{j}$$

$$\vec{F} = -A\sigma(x) \times A\sigma(x) \times \frac{1}{A\varepsilon_0}\,\hat{j}$$



$$\vec{F} = -\frac{Q^2(x)}{A\varepsilon_0}\,\hat{j}$$

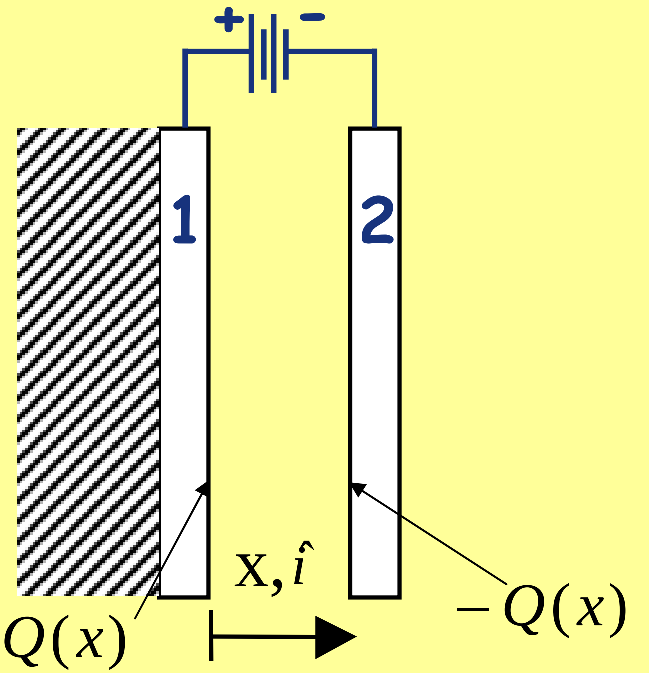
Fuerza es función de x

Fuerza electromotriz

Si hay fem

$$\vec{F}(x) = -\frac{Q(x)^2}{\varepsilon_0 A}\hat{i} \quad \textbf{donde} \quad Q(x) = A\frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

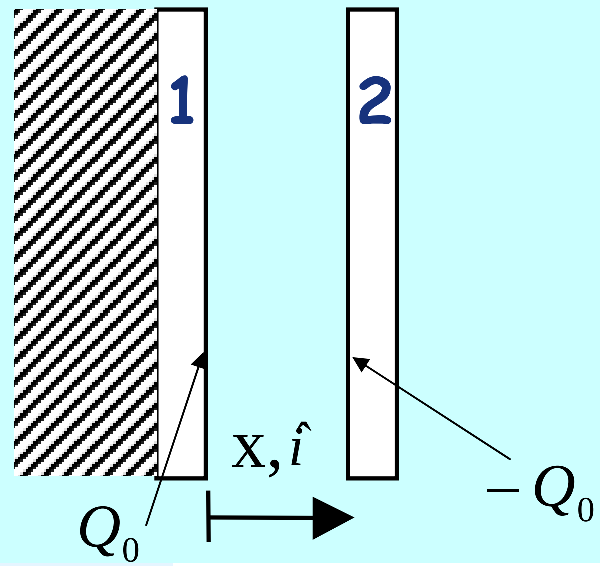
$$V_1 - V_2 = \Delta V = V_0 \quad \textbf{[volts]}$$



Si no hay fem

$$\vec{F} = -\frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{i}$$

$$V_1 - V_2 = \Delta V = Ex = \frac{Q_0}{A\varepsilon_0}x \quad \textbf{[volts]}$$

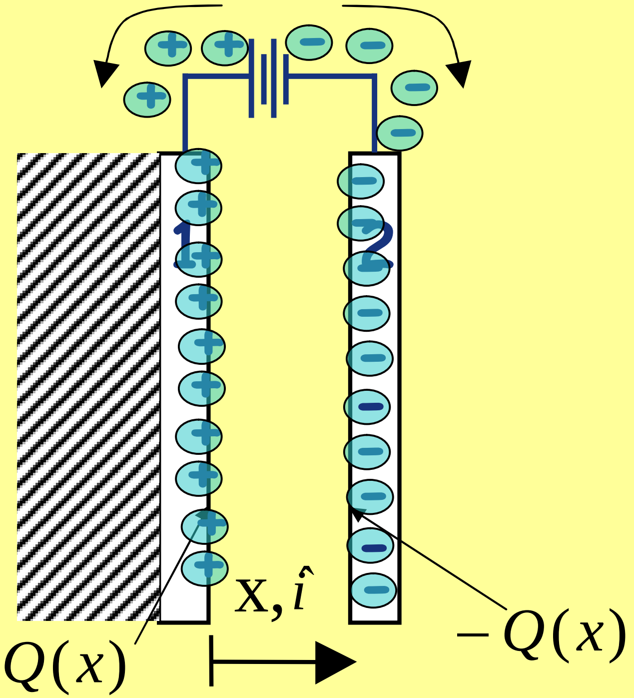


Fuerza electromotriz

Si hay fem

$$\vec{F}(x) = -\frac{Q(x)^2}{\varepsilon_0 A}\hat{i}$$ donde $$Q(x) = A\frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

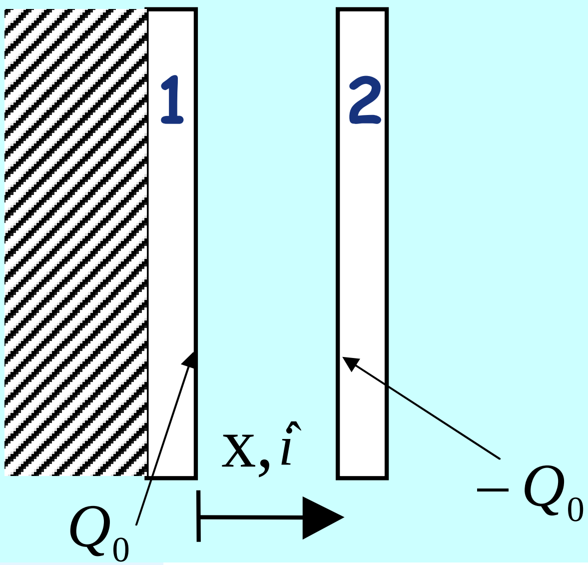
Trabajo realizado por fem



Si no hay fem

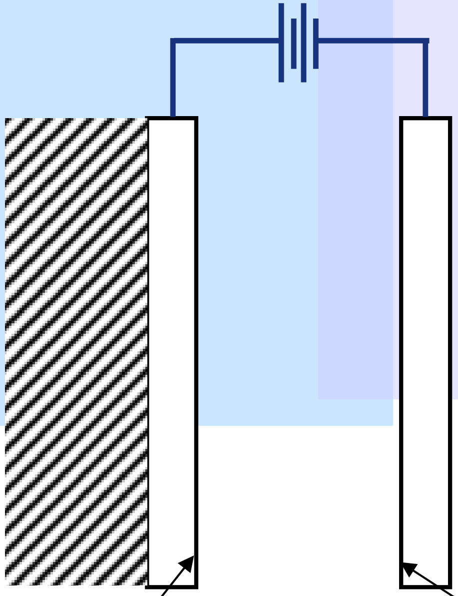
$$\vec{F} = -\frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{i}$$

$$V_1 - V_2 = \Delta V = Ex = \frac{Q_0}{A\varepsilon_0}x \quad \text{[volts]}$$



Trabajo de la Fuerza electromotriz

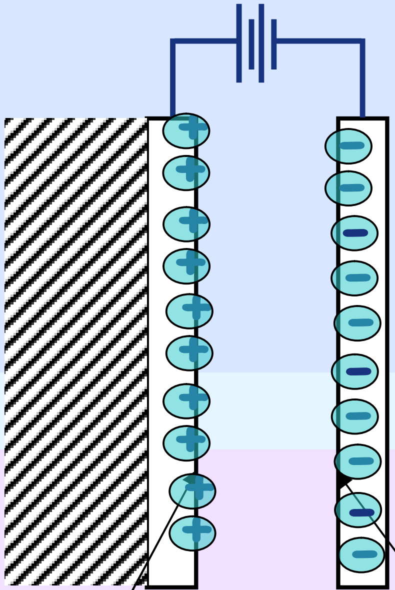
$$\vec{F}(x) = -\frac{Q(x)^2}{\varepsilon_0 A}\hat{i} \quad \textbf{donde} \quad Q(x) = A\frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$



$$Q_0 = A\frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

Energia inicial

$$U = Q_0 V_0$$



Energia final

$$U = Q(x)V_0$$

$$\Rightarrow \Delta U = \left(Q(x) - Q_0\right)V_0$$

$$Q(x) - Q_0 = A\varepsilon_0 V_0\left(\frac{1}{x-\Delta x} - \frac{1}{x}\right)$$

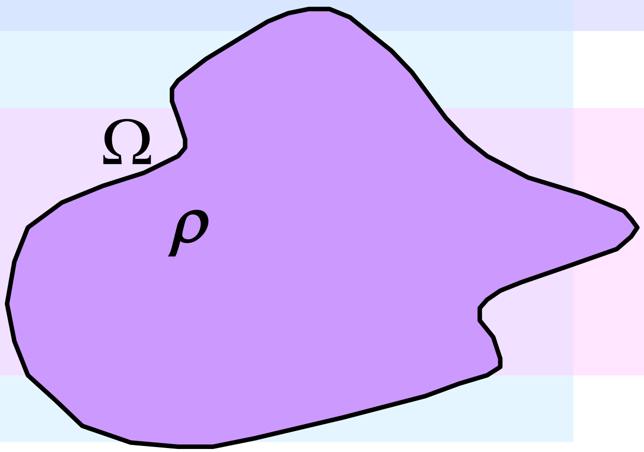
$$Q(x) = A\frac{\varepsilon_0 V_0}{x - \Delta x}$$

Energía en términos de Campos

Habíamos visto que en distribuciones de carga en volumen

$$W = U = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega} \rho(\vec{r})V(\vec{r})dv$$

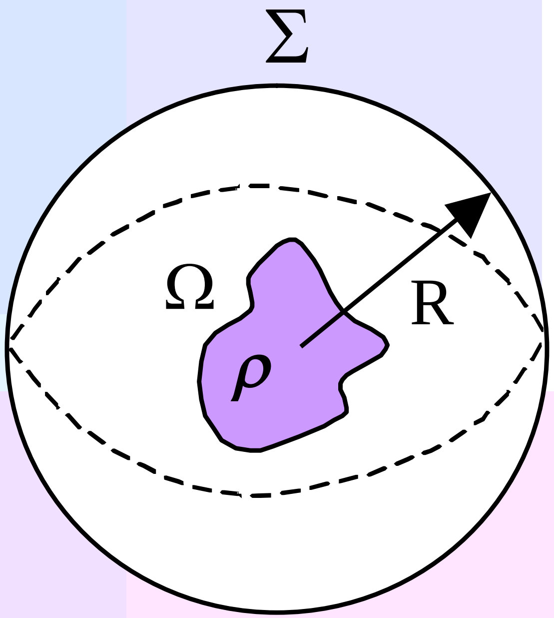
pero $\nabla \bullet \vec{D} = \rho(\vec{r}) \quad \Rightarrow U = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(\nabla \cdot \vec{D})Vdv$



Energía en términos de Campos

ρ será nulo en todo punto fuera del volumen Ω, luego podemos extender el espacio de integración a un espacio mayor, por ejemplo una esfera Σ de radio R

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma}\left(\nabla \cdot \vec{D}\right)V dv$$



y usando

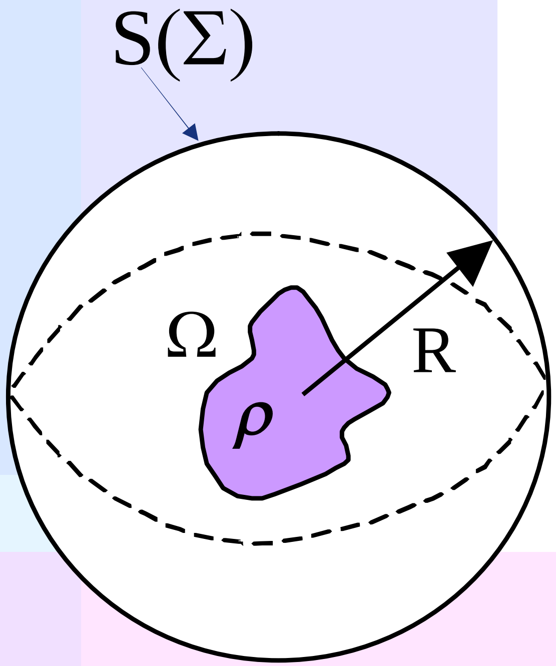
$$\nabla \cdot f\vec{A} = \vec{A}\cdot\nabla f + f\left(\nabla \cdot \vec{A}\right)$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma}\nabla \cdot \left[V\vec{D}\right]dv - \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma}\vec{D}\cdot(\nabla V)dv$$

Energía en términos de Campos

Aplicando el teorema de la divergencia

$$\iiint_{\Sigma} \nabla\cdot\left[V\vec{D}\right]dv = \oiint_{S(\Sigma)} V\vec{D}\bullet d\vec{s}$$



$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\oiint_{S(\Sigma)} V\vec{D}\cdot d\vec{s} - \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma}\vec{D}\cdot\left(\nabla V\right)dv$$

pero $V \propto \dfrac{1}{r}$ **y** $\vec{D} \propto \dfrac{1}{r^2} \Rightarrow V\vec{D} \propto \dfrac{1}{r^3}$

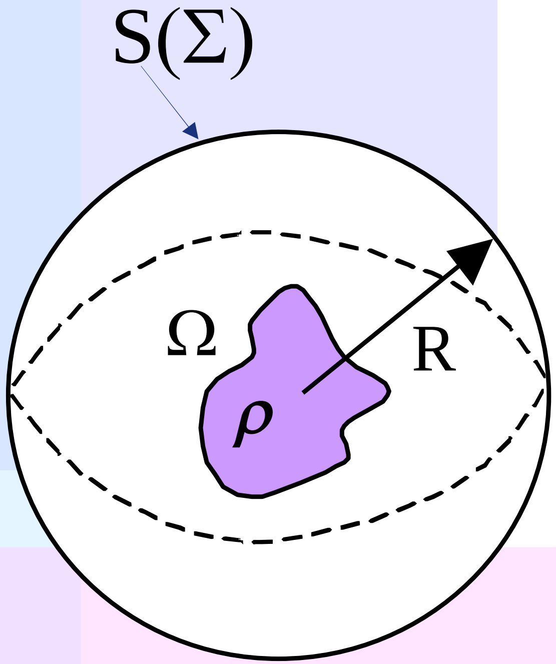
si R→∞ $\displaystyle\oiint_{S(\Sigma)} V\vec{D}\cdot d\vec{s} \to 0 \quad \Rightarrow U = -\frac{1}{2}\iiint_{\Sigma}\vec{D}\cdot\left(\nabla V\right)dv$

Energía en términos de Campos

$$\Rightarrow U = -\frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot(\nabla V)\,dv$$

Aplicando $\nabla V = -\vec{E}$

$$\therefore U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot\vec{E}\,dv$$



Aquí Σ **es todo el espacio**

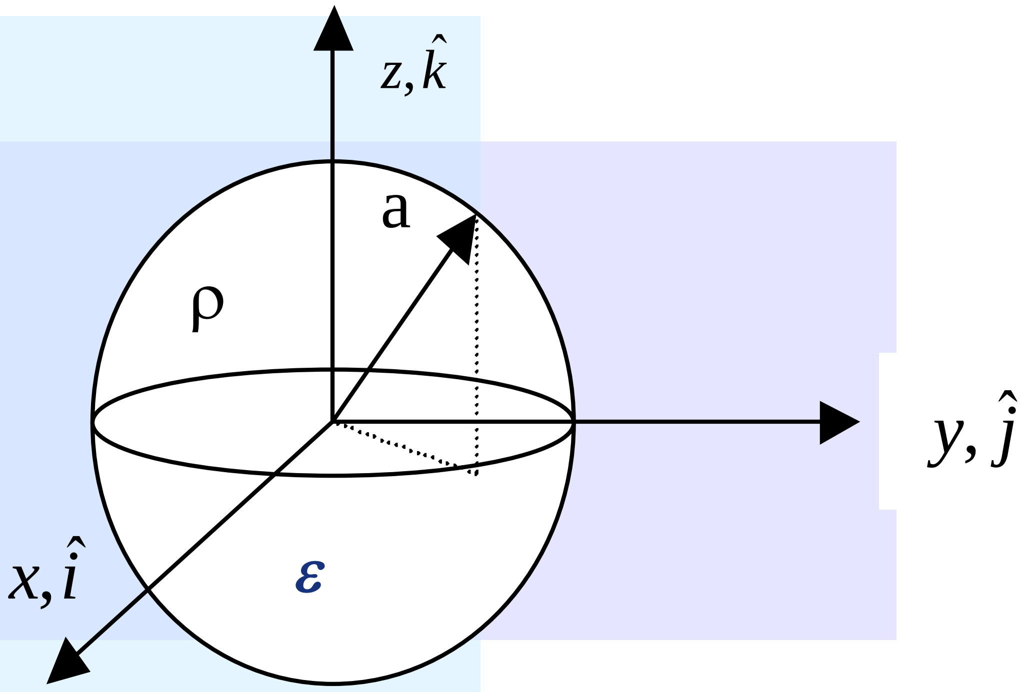
$$W_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$ **es la densidad de energía electrostática**

Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo

Esfera dieléctrica cargada con densidad ρ.

Si $\rho = \rho_0$ es constante se pide calcular la energía electrostática del sistema



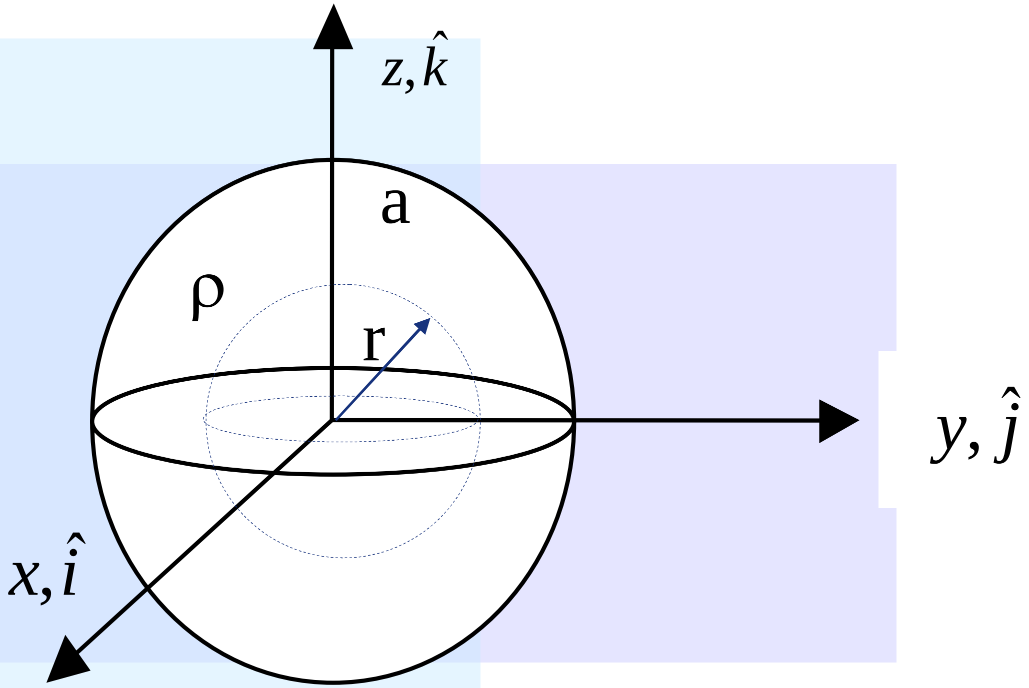
Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo

Para r < a

$$\oint\!\!\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_0}{3} r\hat{r}$$



$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon} r\hat{r}$$

Fuerza Eléctrica y Energía

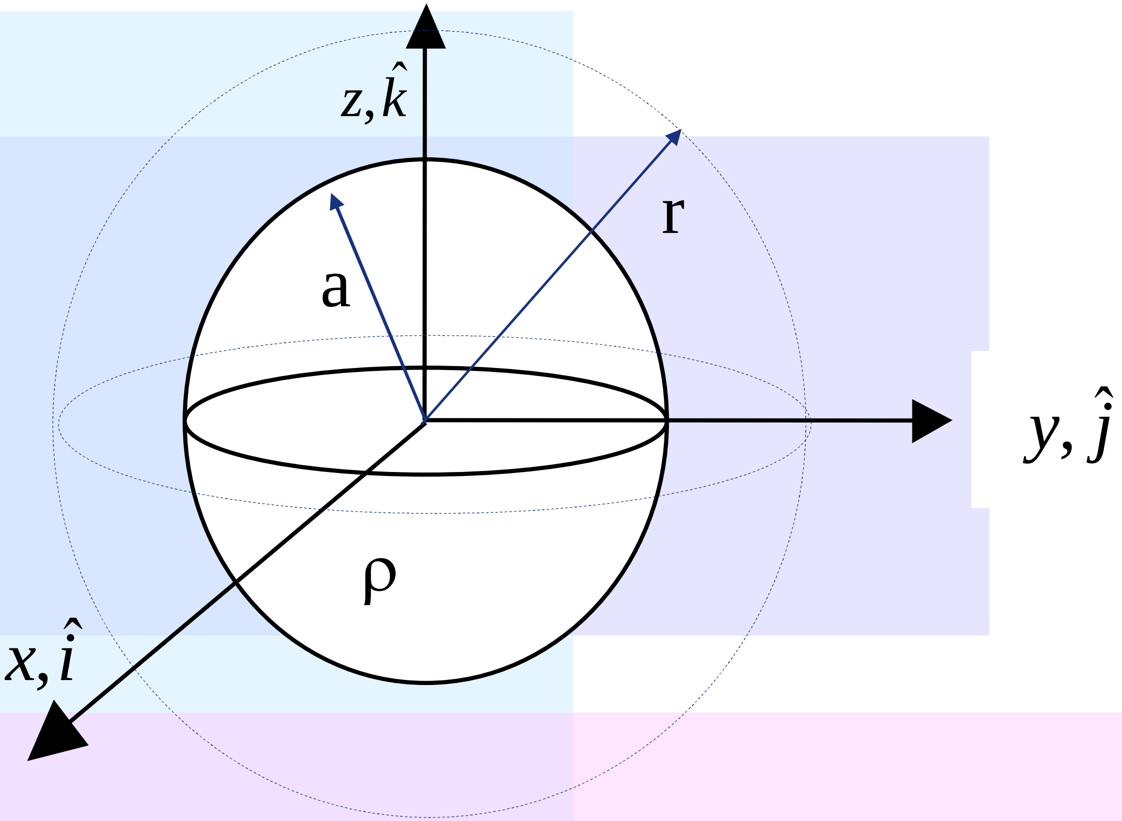
Ejemplo

Para r ≥ a

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_o}{3} \frac{a^3}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

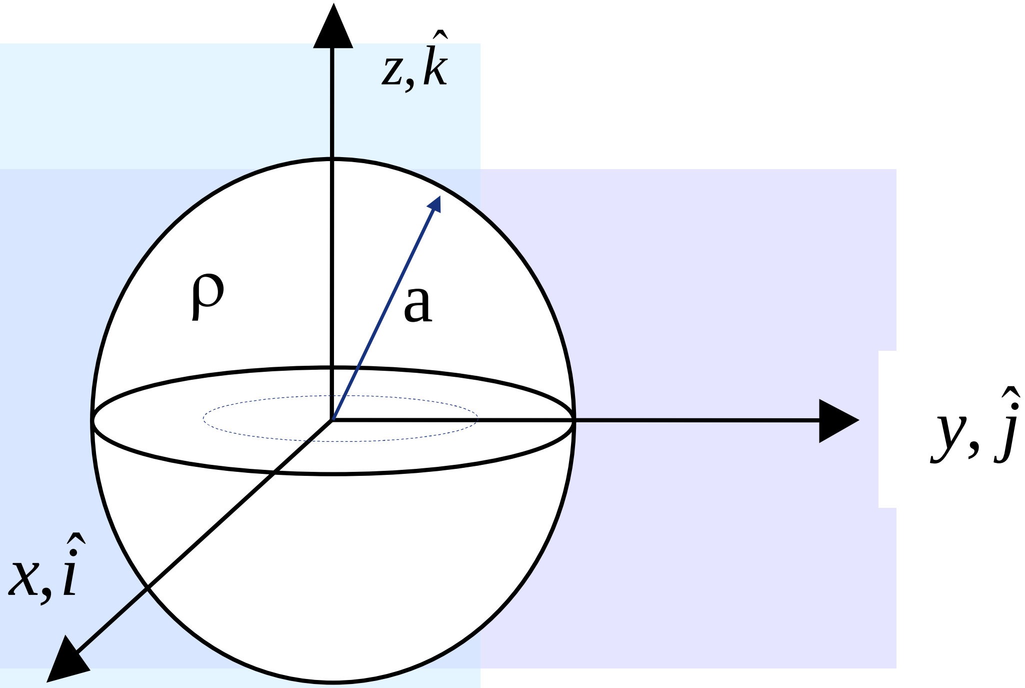


Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo

Ahora aplicamos la fórmula

$$\therefore U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot\vec{E}dv$$

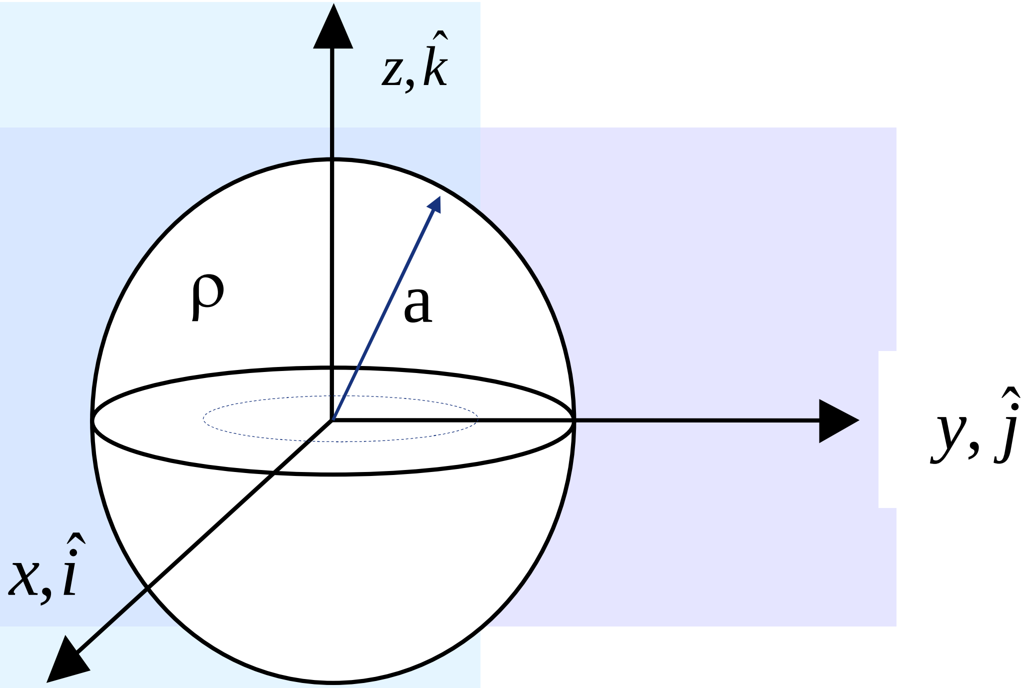


$$U = \frac{1}{2}\iiint_{esfera} \vec{D}\cdot\vec{E}dV + \frac{1}{2}\iiint_{resto} \vec{D}\cdot\vec{E}dV$$

Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo

$$\therefore U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot\vec{E}dv$$



Obtenemos

$$\Rightarrow U = \frac{2\pi\rho_0^2 a^5}{45\varepsilon} + \frac{10\pi\rho_0^2 a^5}{45\varepsilon_0}[J]$$