Auxiliar N°3 FI33A

Prof. auxiliar: Luis Sánchez L

Fecha: 02/04/08

Problema 1 Una varilla delgada de dielectrico de seccion trasversal A se extiende sobre el eje z desde $z = 0$ hasta $z = L$. La polarizacion de la varilla es a lo largo de su longuitud, y esta dada por:

$$\vec{P} = (az^2 + b)\hat{k}$$

Encuentre la densidad de carga volumentrica de polarizacion y la densidad de carga superficial de polarizacion donde corresponda. Demuestre explicitamente que la carga total de polarizacion se anula en este caso.

Solucion Para calcular las densidades de carga de polarizacion tenemos las siguientes formulas:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$
$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Donde $\hat{n}$ es el vector normal exterior a la superficie en la cual se esta calculando dicha densidad. En principio, en la varilla existen tres densidades σ_p, que son, las que aparecen en ambas tapas del cilindro y la que aparece en el manto del cilindro. Las llamaremos σ_{p1} a la de la tapa superior, σ_{p2} a la de la tapa inferior y σ_{p3} a la densidad de carga del manto.

$$\sigma_{p1} = (aL^2 + b)\hat{k} \cdot \hat{k} = aL^2 + b$$
$$\sigma_{p2} = (b\hat{k}) \cdot (-\hat{k}) = -b$$
$$\sigma_{p3} = (az^2 + b)\hat{k} \cdot \hat{\rho} = 0$$

Ahora calculamos la densidad de carga volumetrica de polarizacion.

$$\rho_p = -\frac{d}{dz}(az^2 + b) = 2az$$

Para calcular la carga total de polarizacion debemos integrar las funciones anteriores en las superficies y volumenes respectivos. Debido a que todas las densidades de carga superficiales (σ_p) son constantes, la carga se obtiene simplemente multiplicando la densidad de carga por el area. Con esto se obtiene:

$$Q_{p1} = A(aL^2 + b)$$
$$Q_{p2} = -Ab$$
$$Q_{p3} = 0$$

Para calcular la carga volumetrica de polarizacion debemos integrar en el volumen la densidad de carga.

$$Q_{vol} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R 2az\rho d\rho d\phi dz = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho d\rho d\phi \int_0^L 2azdz = A \int_0^L 2azdz = AaL^2$$

Sumando $Q_{p1} + Q_{p2} + Q_{p3} + Q_{vol}$ se obtiene que la carga total de polarizacion es nula.

Problema 2 Se tienen dos placas conductoras, paralelas , de area A y espesor despreciable separadas por una distancia d. Entre las placas existe un dielectrico lineal e isotropo pero no homogeneo, con una permitividad dielectrica que depende de la distancia a una de las placas, es decir, $\varepsilon(x) = \varepsilon_0 e^{\frac{x}{a}}$ donde x es la distancia a la placa inferior. Suponga que la diferencia de potencial entre las placas es V_0 y que la placa inferior esta conectada a tierra.

(i) Determine los campos $\vec{E}$, $\vec{D}$ y las cargas de polarizacion donde corresponda.

(ii) Determine la capacidad del sistema y el potencial electrostatico en el interior de las placas.

***NOTA**: Cuando hay un sistema de dos (pueden ser mas de dos) condutores se puede definir una constante llamada capacidad y que se define como $C = \frac{Q}{\Delta V}$ donde Q es la carga libre total de la placa que esta a mayor potencial (la otra se carga con $-Q$) y ΔV es la diferencia de potencial entre las placas.*

Solucion Aplicaremos las ecuaciones de maxwell a la region determinada por el dielectrico, es decir, la region entre las placas, sin considerar a estas. En esta region no hay densidad de carga libre (solo aparecen densidades de carga de polarizacion, que no se incluyen en la ley de Gauss), por lo tanto la ley de Gauss en su expresion diferencial queda como:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

Ademas, como es un problema electrostatico, se cumple que el campo electrico es un campo conservativo, es decir:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$
$$\Rightarrow \exists\, \phi \ tal \ que \ \vec{E} = -\nabla \phi$$

Ademas tenemos la relacion $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$. Reemplazando $\vec{D}$ en la primera ecuacion obtenemos:

$$\nabla \cdot (\varepsilon(x)\vec{E}) = 0$$

Y reemplazando el campo $\vec{E}$ en funcion del potencial ϕ se obtiene la ecuacion:

$$\nabla \cdot (-\varepsilon(x)\nabla\phi) = 0$$

Llegando a este punto podemos ver si existe algun tipo de simetria para simplificar la ecuacion anterior. Vamos a suponer que la distancia d es mucho menor que el largo de las placas, con lo cual se puede considerar que las placas son infinitas. Un supuesto alternativo a este, es despreciar el efecto en los bordes de las placas. Ambos supuestos llegan a la misma conclusion: los campos dependen solo de la variable x y apuntan en esta misma direccion. Por lo tanto lo que tenemos es que $\phi = \phi(x)$. Con esto la divergencia y el gradiente anterior se transforman en simples derivadas. La ecuacion que obtenemos es:

$$\frac{d}{dx}(-\varepsilon(x)\frac{d}{dx}\phi) = 0$$

El signo menos se puede obviar, ya que sale fuera de la derivada. Como la derivada de la funcion que esta adentro es igual a cero, necesariamente la funcion es constante, por lo tanto:

$$\varepsilon(x)\frac{d}{dx}\phi = K_1$$

Utilizando la expresion dada para $\varepsilon(x)$, la ecuacion diferencial que obtenemos es:

$$\frac{d\phi}{dx} = K_1\varepsilon_0 e^{-\frac{x}{a}}$$

La solucion de esta ecuacion es:

$$\phi(x) = -aK_1\varepsilon_0 e^{-\frac{x}{a}} + K_2$$

Ahora imponemos las condiciones para el potencial en $x = d$ y en $x = 0$, con esto obtenemos las ecuaciones:

$$-aK_1\varepsilon_0 + K_2 = 0$$
$$-aK_1\varepsilon_0 e^{-\frac{d}{a}} + K_2 = V_0$$

De este sistema despejamos las constantes, resultando:

$$K_1 = \frac{V_0}{a\varepsilon_0(1 - e^{-\frac{d}{a}})}$$
$$K_2 = \frac{V_0}{(1 - e^{-\frac{d}{a}})}$$

Con esto el potencial queda como:

$$\phi(x) = \frac{V_0(1 - e^{-\frac{x}{a}})}{(1 - e^{-\frac{d}{a}})}$$

Con este potencial obtenemos el campo electrico

$$\vec{E} = -\frac{V_0 e^{-\frac{x}{a}}}{a(1 - e^{-\frac{d}{a}})}\hat{i}$$

Y el vector $\vec{D}$ queda como:

$$\vec{D} = -\frac{V_0\varepsilon_0}{a(1 - e^{-\frac{d}{a}})}\hat{i}$$

Ahora, para calcular las cargas de polarizacion, debemos primero obtener el vector $\vec{P}$. Este se calcula como:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$$

Con lo cual, queda como:

$$\vec{P} = -\frac{V_0 \varepsilon_0 (1 - e^{-\frac{x}{a}})}{a(1 - e^{-\frac{d}{a}})} \hat{i}$$

Ahora calculamos las densidades de carga de polarizacion. Estas existen en todo el volumen del dielectrico y en las superficies que limitan este volumen. Debido a que el vector $\vec{P}$ apunta en la direccion $\hat{i}$ se tiene que la densidad superficial de carga de polarizacion existe solo en las superficies superior e inferior del dielectrico, es decir, las superficies que limitan con ambas placas conductoras. En el resto de las superficies la densidad es cero debido a que el vector normal de esas superficies es perpendicular al vector $\vec{P}$. Llamaremos σ_{p1} y σ_{p2} a las densidades de carga de polarizacion de las superficies superior en inferior respectivamente.

$$\sigma_{p1} = \vec{P}(x = d) \cdot \hat{i} = -\frac{V_0 \varepsilon_0}{a}$$

$$\Rightarrow Q_{p1} = -A \frac{V_0 \varepsilon_0}{a}$$

$$\sigma_{p2} = \vec{P}(x = 0) \cdot -\hat{i} = \frac{V_0 \varepsilon_0}{a(1 - e^{-\frac{d}{a}})}$$

$$\Rightarrow Q_{p2} = A \frac{V_0 \varepsilon_0}{a(1 - e^{-\frac{d}{a}})}$$

Ahora calculamos la densidad y la carga de polarizacion volumetrica:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = \frac{V_0 \varepsilon_0 e^{-\frac{x}{a}}}{a^2(1 - e^{-\frac{d}{a}})}$$

$$\Rightarrow Q_p = A \int_0^d \frac{V_0 \varepsilon_0 e^{-\frac{x}{a}}}{a^2(1 - e^{-\frac{d}{a}})} dx = -A \frac{V_0 \varepsilon_0 (1 - e^{-\frac{x}{a}})}{a(1 - e^{-\frac{d}{a}})}$$

Ahora debemos determinar la carga libre que se induce en las placas debido a la diferencia de potencial a la cual estan sometidas. Para esto aplicaremos en teorema de Gauss en un cilindro de radio R y altura L, el cual tiene su centro justo en la placa de arriba. Suponiendo que la densidad de carga sobre la placa superior es σ, la carga total encerrada es:

$$Q_{enc} = 2\pi R^2 \sigma$$

El flujo es nulo en todas las superficies, menos en la pata inferior del cilindro:

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2\pi R^2 \frac{V_0 \varepsilon_0}{a(1 - e^{-\frac{d}{a}})}$$

igualando las expresiones anteriores obtenemos:

$$\sigma = \frac{V_0 \varepsilon_0}{a(1 - e^{-\frac{d}{a}})}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{AV_0\varepsilon_0}{a(1-e^{-\frac{d}{a}})}$$

Con esto se tiene que:

$$C = \frac{A\varepsilon_0}{a(1-e^{-\frac{d}{a}})}$$

Que corresponde a la capacidad del sistema (ver nota).

Problema 3 El fenomeno de los rayos, en su version mas simple, puede entenderse como la ruptura dielectrica del aire, cuando el campo electrico entre la tierra y las nubes llega a su limite de fuerza dielectrica.

Para modelar este fenomeno, se propone el esquema de la figura 1, en donde las nubes se suponen agrupadas

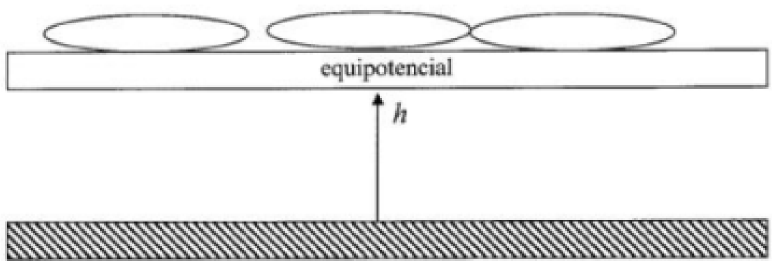

Figura 1: Esquema del fenomeno

sobre una linea imaginaria de altura h, la cual se puede asumir equipotencial. A su vez, el suelo puede asumirse equipontencial tambien con valor $0[V]$. sabiendo que:

- La ruptura dielectrica del aire es a $3 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$
- El potencial crece en forma cuadratica con la altura
- En un ambiente con humedo con neblina, la cual puede asimilarse a un dielectrico de constante relativa $\varepsilon_r = 50$, una sonda de medicion indica que a 1 metro del suelo el potencial vale $5[V]$.

Se pide:

(i) Calcular la altura critica a la cual se produce el rayo

(ii) Estimar la carga acumulada en un radio de $1km^2$ justo antes de producirse el rayo. Suponga que la condicion climatica es bajo neblina.

Solucion Propuesto

Problema 4 Una varilla que tiene forma de cilindro circular recto de radio R y largo L se polariza en la direccion de su longuitud. Si la polarizacion es uniforme y de magnitud P_0, calcule el campo electrico resultante de esta polarizacion en un punto del eje de la varilla.

Solucion Pendiente

Problema 5 Demuestre que en un medio dielectrico se cumple la siguiente relacion entre la polarizacion $\vec{P}$ y las densidades de polarizacion σ_p y ρ_p.

$$\int_V \vec{P} dV = \int_V \rho_p \vec{r} dV + \int_S \sigma_p \vec{r} dS$$

Solucion Propuesto