# Resolución Ej. Extra Aux. N°2

Prof. Aux.: F. L. Benavides.

Fecha: Miércoles 26 de Marzo.

**Problema 1**

**a)** Para ésta parte, se escribirán los campos eléctricos originados por cada carga, y con el ppio. de superposición, se obtendrá una expresión para el campo total, en tres dimensiones. Para cada caso utilizamos *Ley de Gauss.* Tal y como antes, dada la geometría de las cargas se asume el campo radial según coordenadas esféricas, y la superficie encerrada corresponde al manto de la esfera de radio r. Así:

$$\int_{S=dV} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} r^2 sen(\theta) d\theta d\phi = -\frac{q}{\varepsilon_0} \wedge \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} r^2 sen(\theta) d\theta d\phi = \frac{q}{2\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{E}(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (1) \\ \overrightarrow{E}(r') = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 r'^2}\hat{r}' & (2) \end{cases}$$

Donde (1) corresponde al campo generado por la partícula con carga -q, y (2) a aquella con carga $+\frac{q}{2}$. Al pasar el campo a coordenadas cartesianas, y usando el mismo sistema de referencia, centrado en -q, para ambos casos, la superposición entrega, (trabajando sólo la magnitud del campo):

$$\mid \overrightarrow{E}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \mid = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{2\left((x-a)^2 + y^2 + z^2\right)} - \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right]$$

Al evaluar en el eje x, imponemos que y = z = 0. Agregando la condición $\mid \overrightarrow{E} \mid = 0$,

$$\frac{1}{2(x-a)^2} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = 2(x-a)^2 \Rightarrow x^2 - 4ax + 2a^2 = 0 \Rightarrow x = a(2 \pm \sqrt{2})\,[m]$$

Lo que resuelve el problema.

**b)** Queremos probar que existe una superficie equipotencial nula con forma esférica, para lo que planteamos inicialmente el potencial genérico. Así,

$$V(\overrightarrow{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{\parallel \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_k \parallel}$$

Entonces,

$$V(\overrightarrow{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{2\left((x-a)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

Es importante notar en ésta expresión que se asume que la referencia es tal que el potencial se anula en el infinito. Esto es no sólo razonable particularmente, sino que se extiende a cualquier distribución finita de cargas. Eso sí, pudiera ser que el potencial fuera nulo en otra(s) posición(es) del espacio, pero aún si ésto sucede, conviene usar lo antes nombrado. De no hacerlo así, la expresión inicial genérica ***no*** es válida, pues falta un término constante que dependería de la referencia usada.

Por lo anterior, tiene sentido usar ésta expresión para buscar una superficie a potencial cero *'con forma', aún sabiendo que en el infinito existe una, también nula.* Imponiendo V = 0,

$$2\left((x-a)^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{4} = \pm\left((x-a)^2+y^2+z^2\right)$$

Al resolver, las soluciones quedan:

$$\begin{cases} (x-\frac{4a}{3})^2+y^2+z^2 = \frac{4a^2}{9} & (+) \\ (x-\frac{4a}{5})^2+y^2+z^2 = -\frac{4a^2}{25} & (-) \end{cases}$$

Con ésto, las coordenadas del centro de la esfera obtenida en (+), (pues (-) no tiene significado físico), son: $(\frac{4a}{3}, 0, 0)$.

**Problema 2**

**a)** Por la simetría de la situación, se asume que $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = E(z)(-\hat{k})$. Adicionalmente, se supone que la densidad de carga libre de la atmósfera es constante, (aún cuando no lo sea en ésta situación, pues para efectos de lo buscado es equivalente), y que ésta se comporta como el vacío en términos eléctricos. Planteando la ley de gauss en su forma diferencial, en coordenadas cartesianas, colocando el origen sobre la superficie terrestre,

$$\nabla\cdot\overrightarrow{E} = \frac{\rho(\overrightarrow{r})}{\varepsilon_0} \Rightarrow -\frac{\partial E}{\partial z}(z) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

El signo menos aparece pues las coordenadas cartesianas tienen sus vectores unitarios definidos positivamente, (i.e., con orientación *hacia afuera* del origen), luego el - que aparece en el campo inicial debe trasladarse a su magnitud. Esto es además coherente, pues los datos confirman que la magnitud del campo disminuye con la altura. Así,

$$E(z) = -\int_{z_0}^{z}\frac{\rho}{\varepsilon_0}dz = C - \frac{\rho}{\varepsilon_0}z$$

Con C constante. Evaluando los datos,

$$\begin{cases} E(0) = 200\left[\frac{V}{m}\right] \\ E(1400) = 20\left[\frac{V}{m}\right] \end{cases} \Rightarrow E(z) = 200 - \frac{\rho}{\varepsilon_0}z \Rightarrow 20 = 200 - \frac{\rho}{\varepsilon_0}1400 \Rightarrow \rho = \frac{180\varepsilon_0}{1400}$$

Tomando $\varepsilon_0 \simeq 8.854\cdot 10^{-12}\left[\frac{F}{m}\right]$, $\rho \simeq 1.14\cdot 10^{-12}\left[\frac{C}{m^3}\right]$

**b)** Para ésta parte, primero se obtiene la carga que debe tener la esfera conductora para alcanzar el campo crítico justo en la vecindad del manto. Con ello, se calculará el potencial. Así, (en coordenadas esféricas),

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = E(r)\hat{r} \Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\hat{r}\cdot\hat{r}r^2 sen(\theta)d\theta d\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Evaluando, se obtiene la siguiente expresión para despejar Q:

$$\Rightarrow 3\cdot 10^6 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 0.1^2}$$

El potencial crítico máximo queda:

$$-\int_{\infty}^{0.1}\frac{3\cdot 10^6 4\pi\varepsilon_0 0.01}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot(\hat{-r})dr = -300000\,[V]$$

De forma análoga, se resuelve la situación con una esfera conductora de 1 coulomb. Se tendrá, (con el mismo valor antes usado de $\varepsilon_0$):

$$3 \cdot 10^6 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow r \simeq 54.73\,[m]$$

**Problema 3**

Primero es importante notar que *es posible* calcular el campo eléctrico en el origen por definición y dicho cálculo es mucho más corto que el presentado a continuación. Queda propuesto, puesto que la solución por éste camino es algo más *'compleja'* de obtener, dado que requiere argumentación geométrica más directa. Para obtener el campo eléctrico, se obtendrá primero el potencial eléctrico, y luego se calculará el gradiente con lo que se tendrá lo pedido. Por definición, (con referencia de potencial nulo en el infinito),

$$V(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{\parallel \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}' \parallel} dq(\overrightarrow{r}')$$

con la integral definida en éste caso en la superficie del casquete, cargada. $\overrightarrow{r}$ representa la(s) posición(es) deseada(s), y $\overrightarrow{r}'$ la(s) ubicación(es) de la(s) carga(s). Por conveniencia se centra el casquete en el origen. Como se busca eventualmente tomar gradiente, no tiene sentido calcular el potencial en un punto. Se calculará, en vez, el potencial en todo el eje $\hat{k}$, (en z), y luego se impodrá z=0. (La idea de calcular potencial en cierto eje para luego tomar gradiente, imponer cierta(s) condición(es) y finalmente obtener el campo eléctrico deseado es utilizada a menudo). Para escribir el término en el denominador de la fracción dentro de la integral, se observa que:

$$\parallel \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}' \parallel = \parallel z\hat{k} - r\hat{r} \parallel = \parallel z\hat{k} - rsen\theta cos\varphi\hat{i} - rsen\theta sen\varphi\hat{j} - rcos\theta\hat{k} \parallel$$

$$= \sqrt{z^2 - 2zrcos\theta + r^2}$$

El casquete esférico queda parametrizado por:

$$\begin{cases} r = R \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

De ésta forma, la expresión queda: (con $dq = \sigma dS$)

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sigma R^2 sen\theta d\theta d\varphi}{\sqrt{z^2 - 2zRcos\theta + R^2}} = \frac{2\pi\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{sen\theta d\theta}{\sqrt{z^2 - 2zRcos\theta + R^2}} =$$

$$= \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0} \left[ -\frac{2}{-2zR} \sqrt{z^2 - 2zRcos\theta + R^2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z} \left[ z + R - \sqrt{z^2 + R^2} \right]$$

Usando ahora,

$$\overrightarrow{E} = -\nabla V$$

se confirma con la ecuación que el campo eléctrico, por simetría, en el eje z depende sólo de z, (y dada la disposición de cargas apunta según $\hat{k}$). Calculando, tenemos:

$$\overrightarrow{E}(z) = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0} \hat{k} \left( \frac{1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}}{z^2} \right)$$

Se desea el campo $\overrightarrow{E}(z = 0)$, pero la expresión anterior no está bien definida allí. Sin embargo, como al tender z a cero, tanto numerador como denominador caen a cero, es posible utilizar la regla de l'Hopital. Así, (y esto finaliza el problema):

$$\overrightarrow{E}(z = 0) = \lim_{z \to 0} \overrightarrow{E}(z) = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0} \hat{k} \lim_{z \to 0} \frac{\frac{d}{dz} \left( 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)}{\frac{d}{dz} (z^2)} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \hat{k} \left[ \frac{V}{m} \right]$$