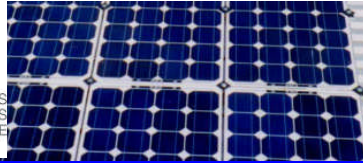




fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



FI33A ELECTROMAGNETISMO

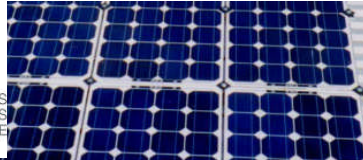
Clase 4

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



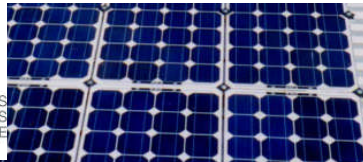
fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

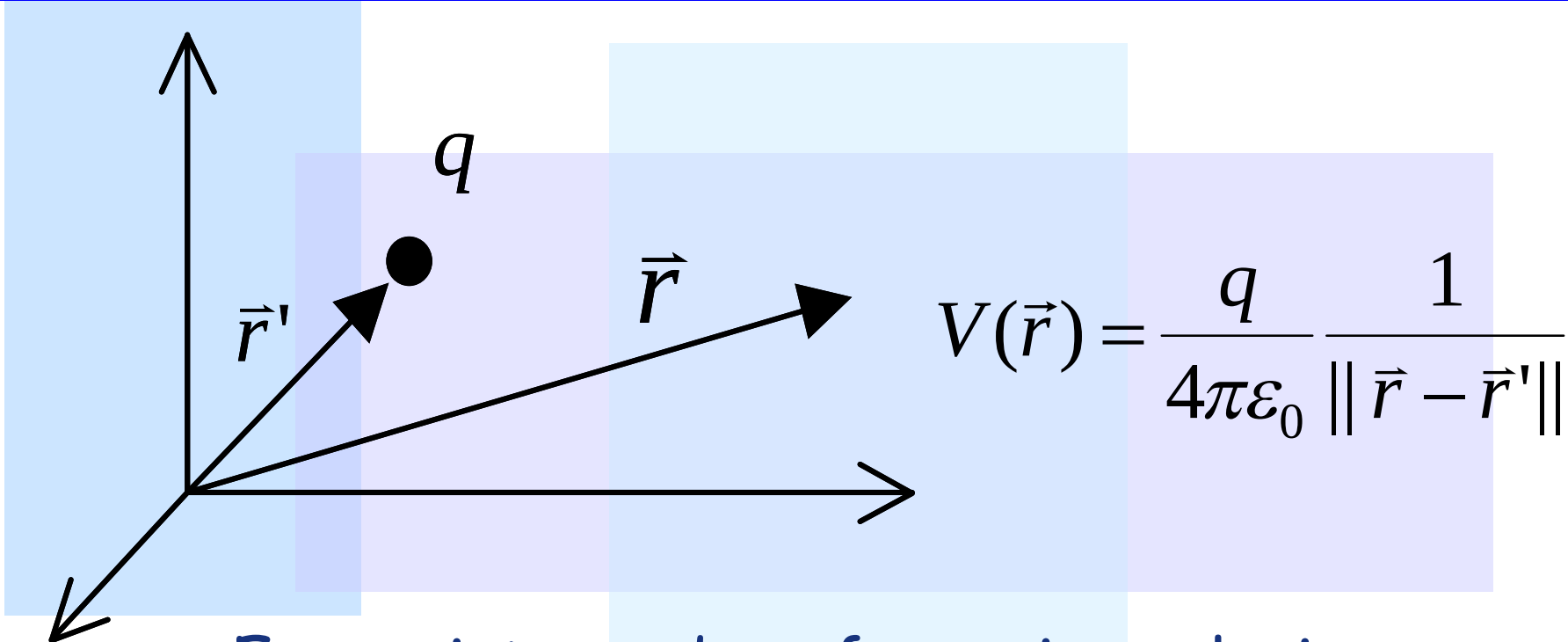


INDICE

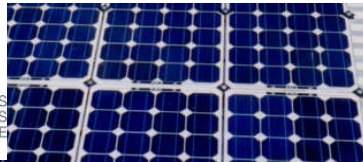
- Ecuación de Laplace,
- Campo Eléctrico Conservativo



Definición de potencial



En un sistema de referencia cualquiera
 V es una función lineal con la carga, luego
se cumple superposición



Definición de potencial

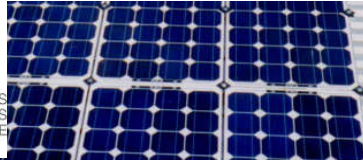
Para sistema de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_1\|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_2\|} + \dots + \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_n\|}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \sum \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_k\|}$$

Para distribuciones continuas de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{dq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$



Relaciones entre campo eléctrico y potencial

$$V_{AB} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Tomando A como
referencia y haciendo B
variable

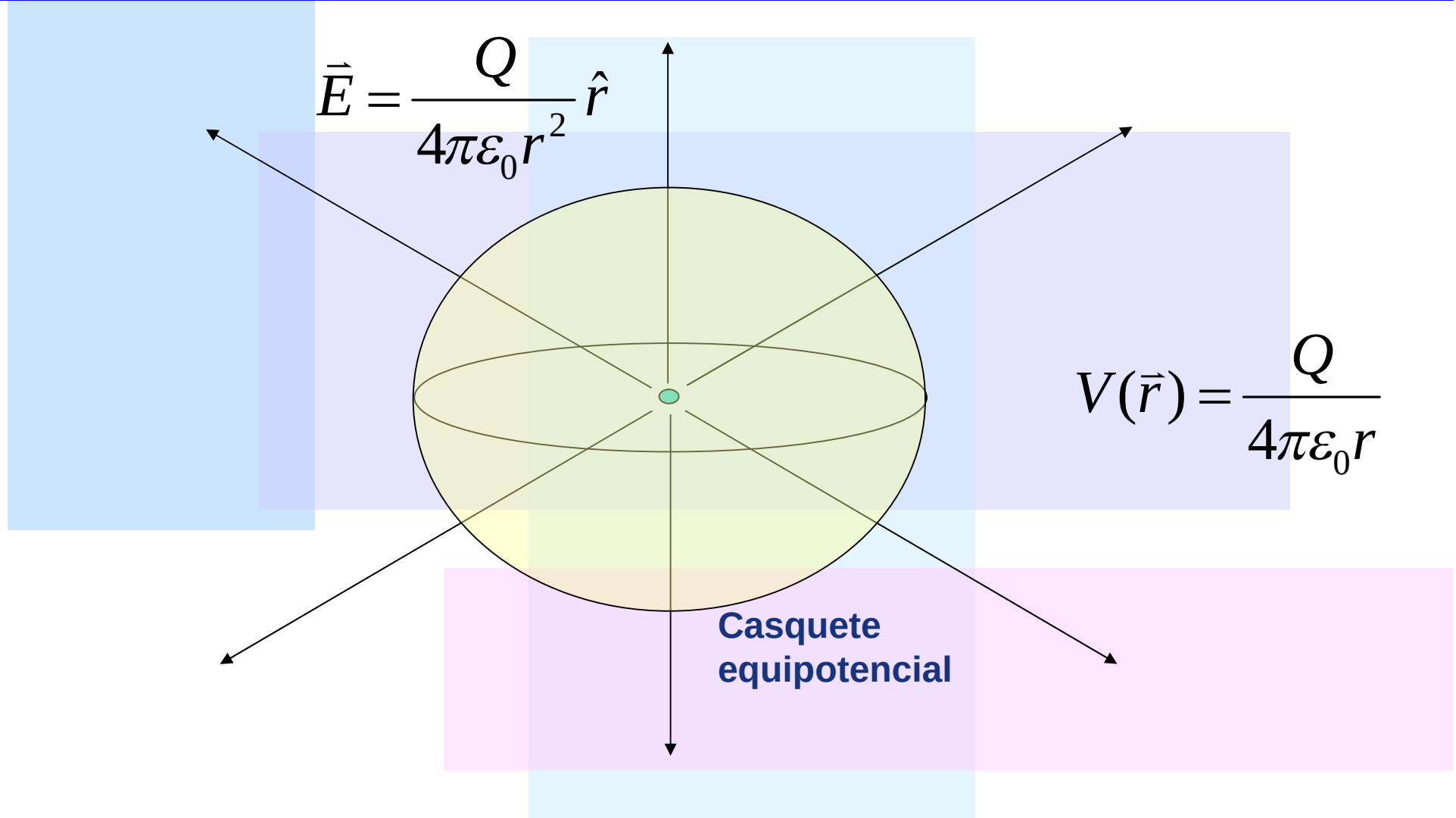
$$V(r) = - \int_{ref}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{ref}$$

Luego

$$\nabla V(r) = -\vec{E}(r)$$



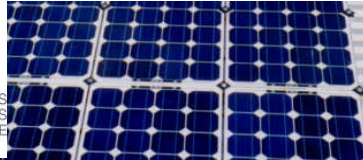
Campo eléctrico y potencial de carga





fcfm

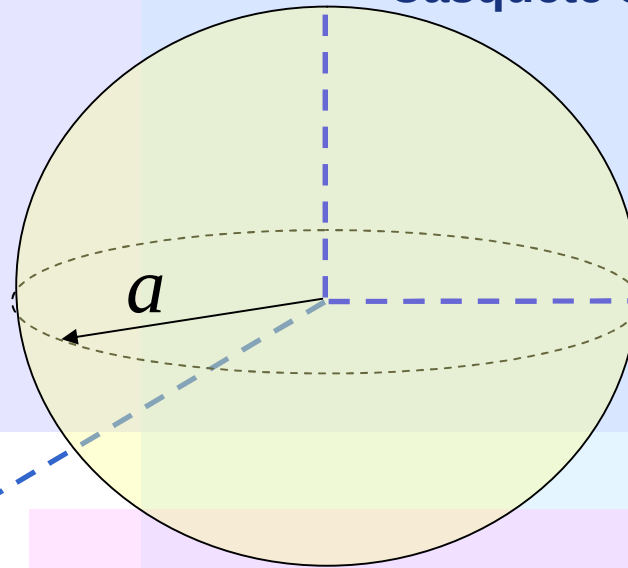
Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

Calcular potencial y campo
en todo el espacio

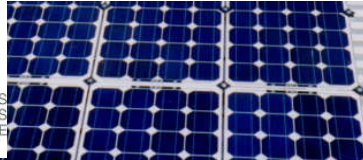
Casquete con densidad de carga σ





fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

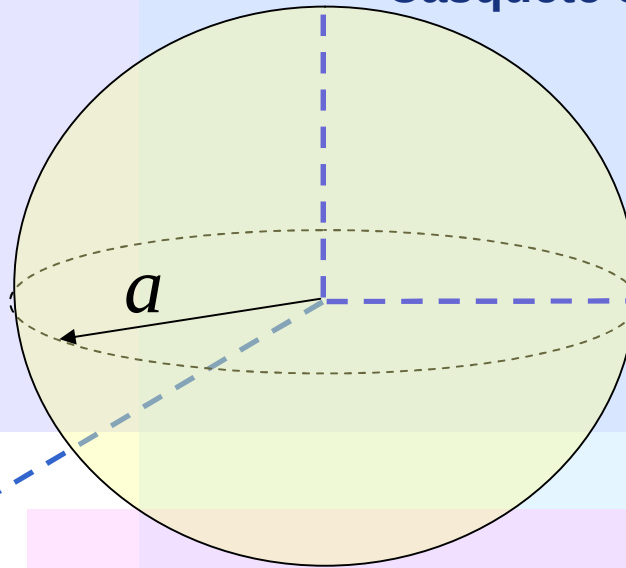


Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

Calcular potencial y campo
en todo el espacio

I. Fuera de la esfera

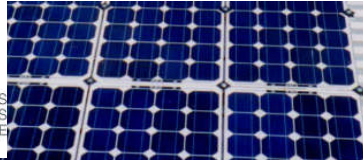
Casquete con densidad de carga σ





fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

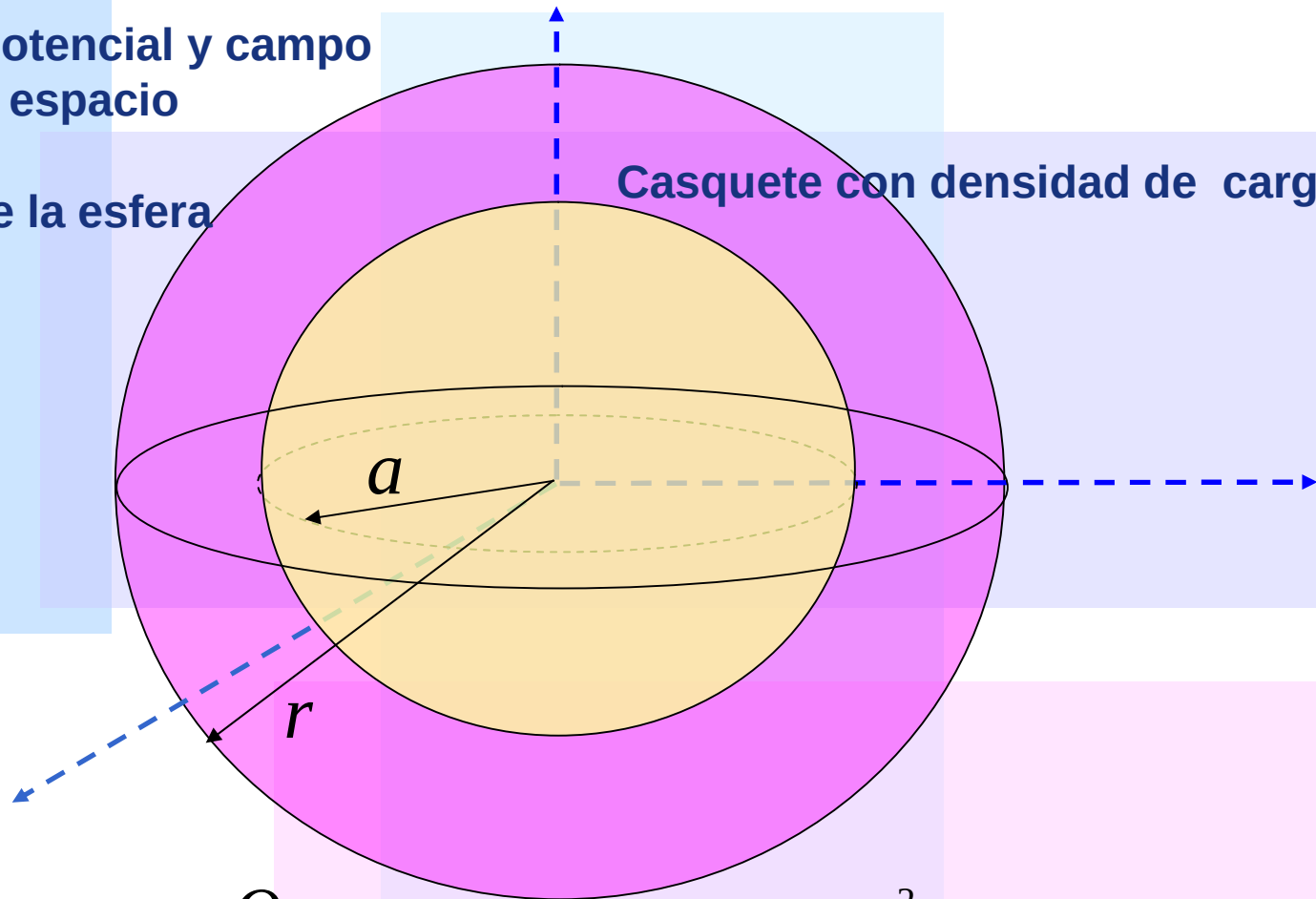


Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

Calcular potencial y campo
en todo el espacio

I. Fuera de la esfera

Casquete con densidad de carga σ

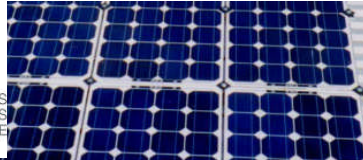


$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad 4\pi r^2 E = \frac{4\pi a^2 \sigma}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{a^2 \sigma}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

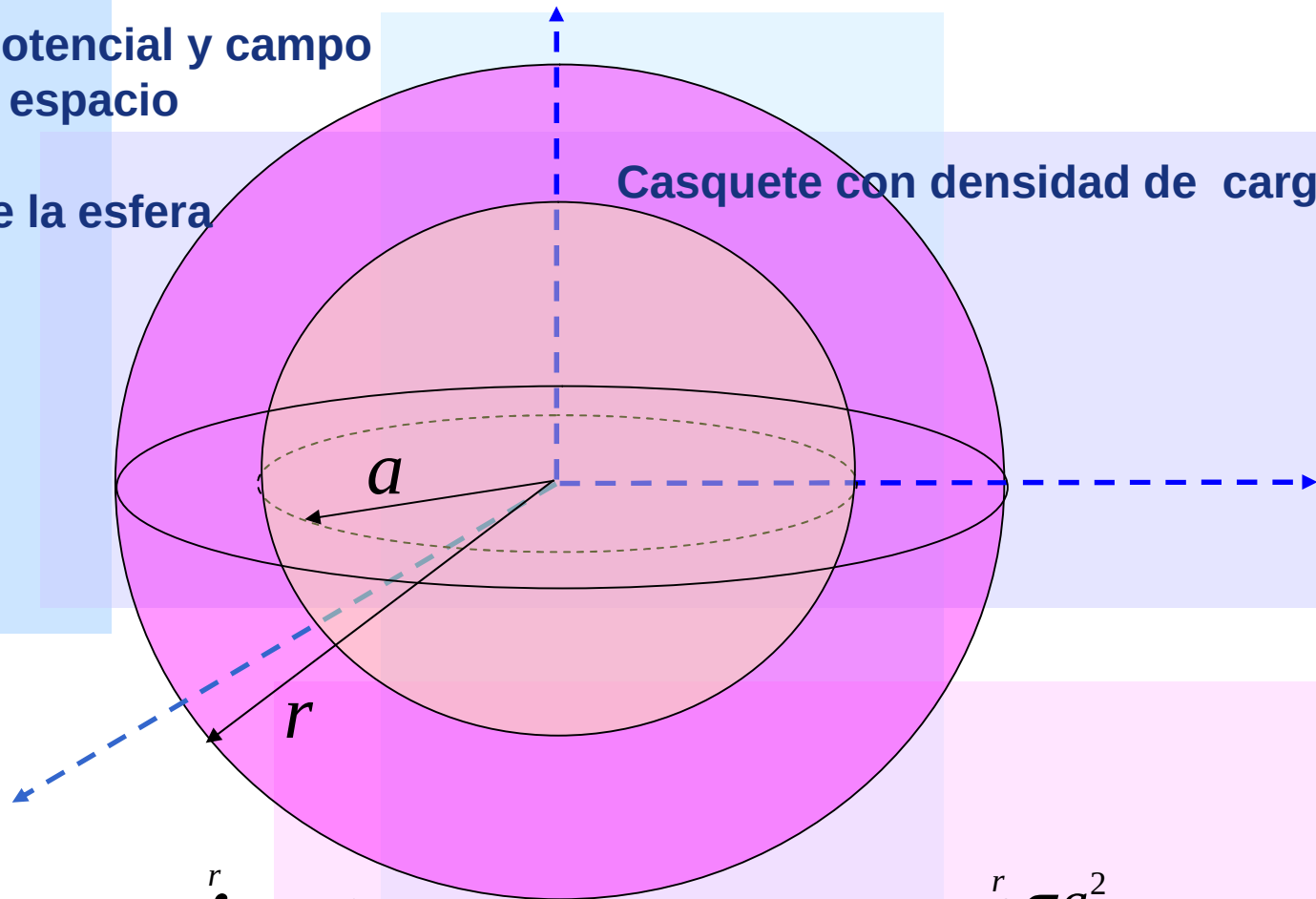


Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

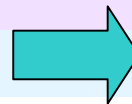
Calcular potencial y campo
en todo el espacio

I. Fuera de la esfera

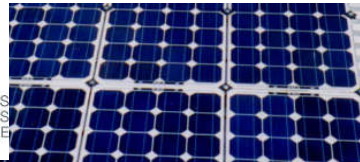
Casquete con densidad de carga σ



$$V(\vec{r}) = - \int_{ref}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{ref}$$



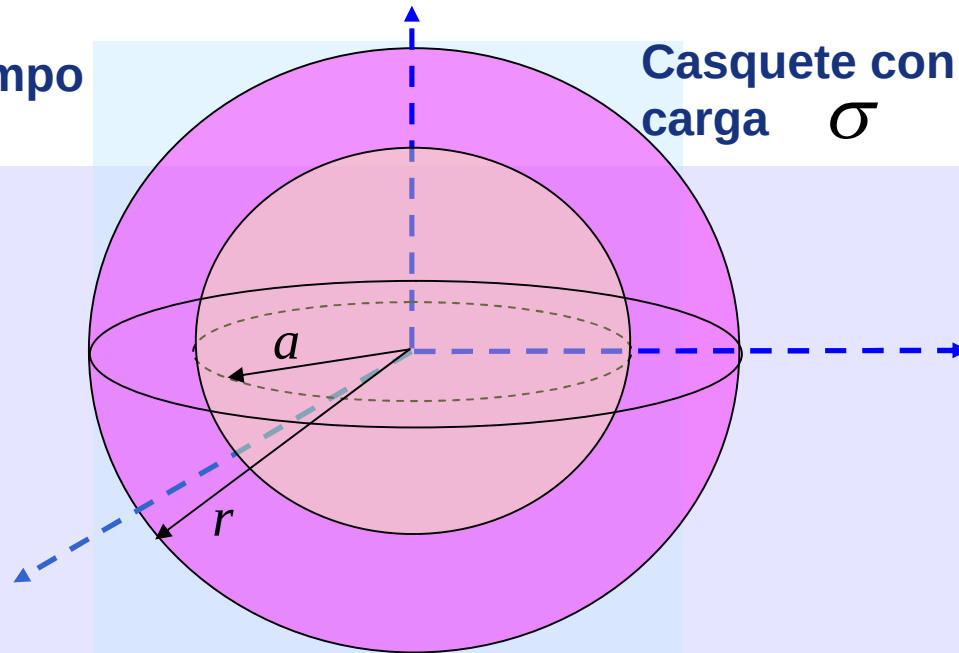
$$V(\vec{r}) = - \int_{ref}^r \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} + V_{ref}$$



Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

Calcular potencial y campo en todo el espacio

I. Fuera de la esfera



Casquete con densidad de carga σ

$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r} \bigg|_{r_0}^r + V_{ref}(r = r_0) = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r} - \frac{\sigma a}{\epsilon_0 a} + V_{ref}(r = r_0)$$

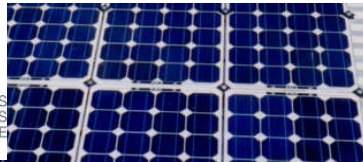
Tomando como referencia el infinito, es decir, $V(r = r_0 \rightarrow \infty) = 0$

$$\Rightarrow V(\infty) = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0 a} + V_{ref} = 0 \quad \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r}$$



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

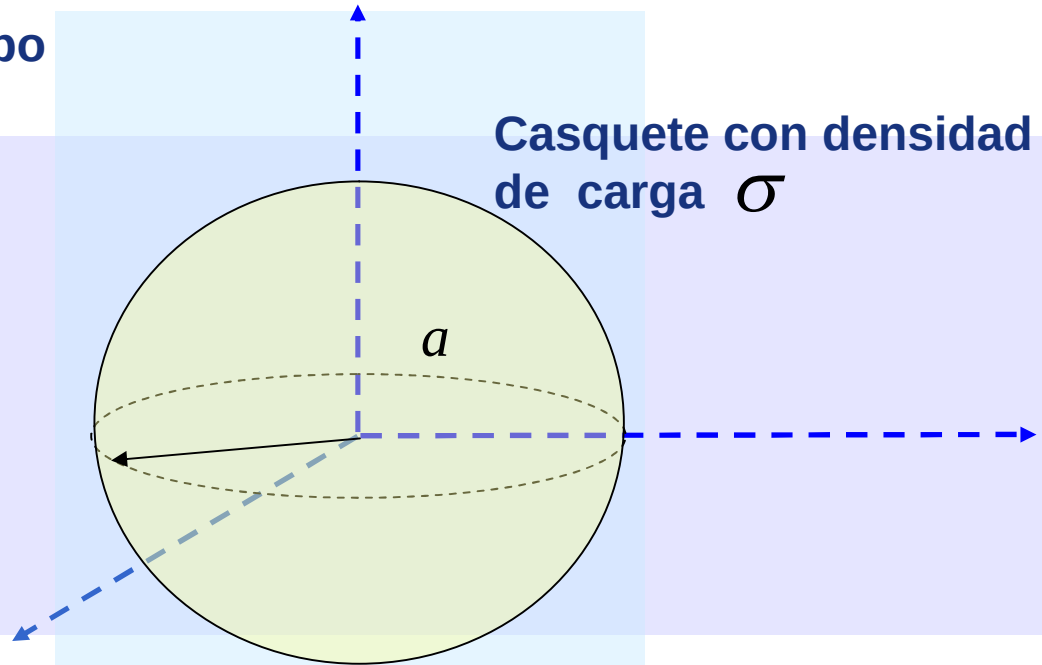


Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

Calcular potencial y campo en todo el espacio

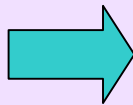
II. Dentro de la esfera

Casquete con densidad de carga σ



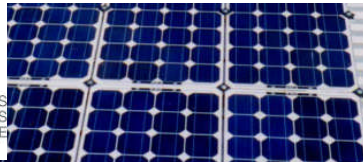
Al interior el campo es nulo y el potencial es constante. Así para $\|\vec{r}\| \leq a$

$$V(\vec{r} = a) = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 a} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0}$$



$$V(\|\vec{r}\| \leq a) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad \vec{E}(\vec{r}) = 0\hat{r}$$

Notar que se escoge una y sólo una referencia para el potencial en todo el espacio. Además el potencial es continuo mientras que el campo no lo es.



ECUACION DE LAPLACE

Teníamos

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

Tomando la divergencia

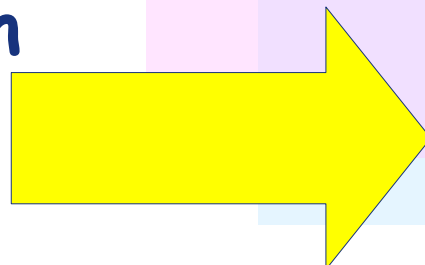
$$\nabla \bullet (\nabla V(\vec{r})) = -\nabla \bullet \vec{E}(\vec{r})$$

Usando la 1ª
ecuación de Maxwell

$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ecuación de
Poisson

$$\nabla \bullet (\nabla V(\vec{r})) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

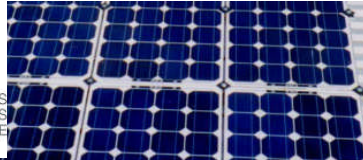


$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$



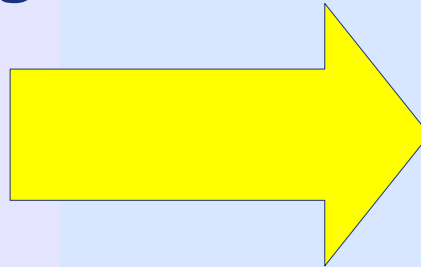
fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



ECUACION DE LAPLACE

Si no hay cargas:



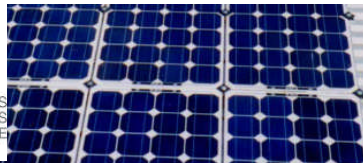
$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 0$$

Ecuación de Laplace



fcfm

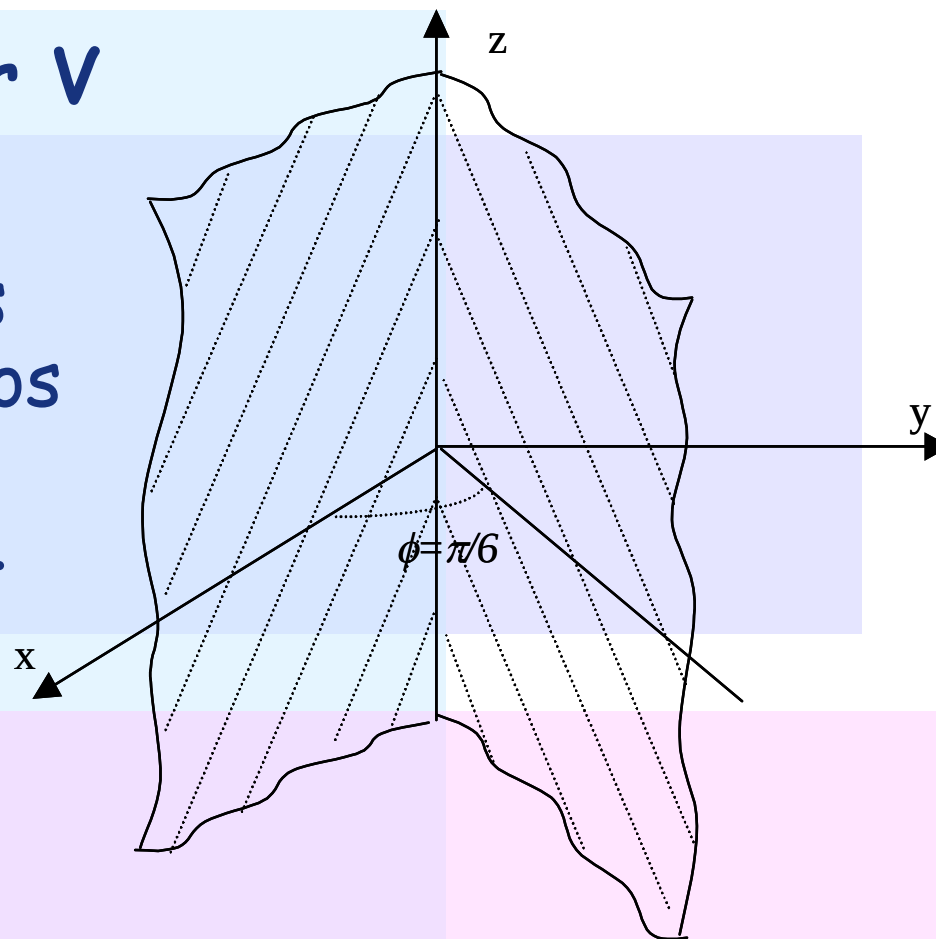
Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

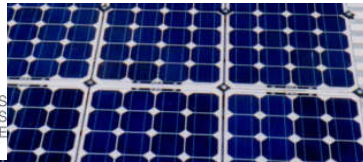


ECUACION DE LAPLACE

EJEMPLO 12. Calcular V

Se sabe que el potencial en los planos semi-infinitos definidos por $V(\phi=0, \rho, z) = 0$ y $V(\phi=\pi/6, \rho, z) = 100 \text{ V}$.

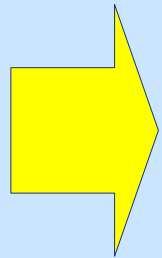




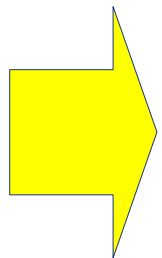
ECUACION DE LAPLACE

Solⁿ

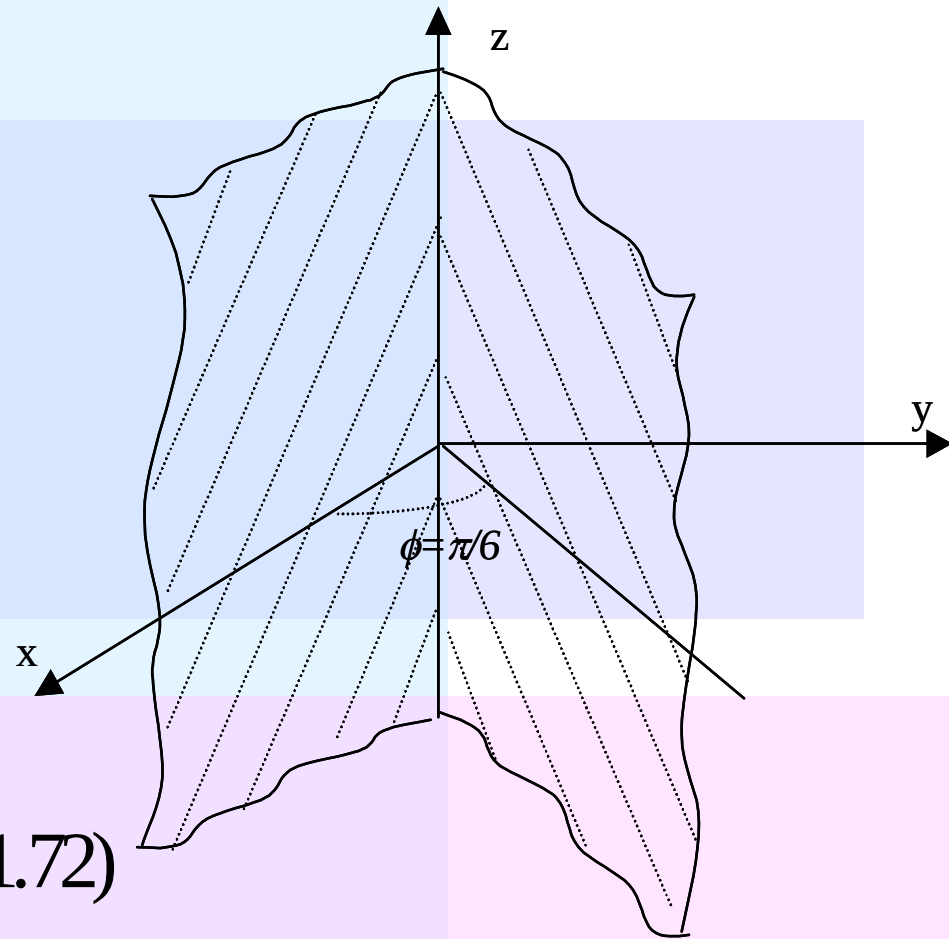
Hay que darse cuenta que
V sólo dependen de ϕ



Sólo interesa una
coordenada del
laplaciano (ϕ)



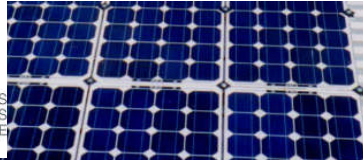
$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.72)$$





fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



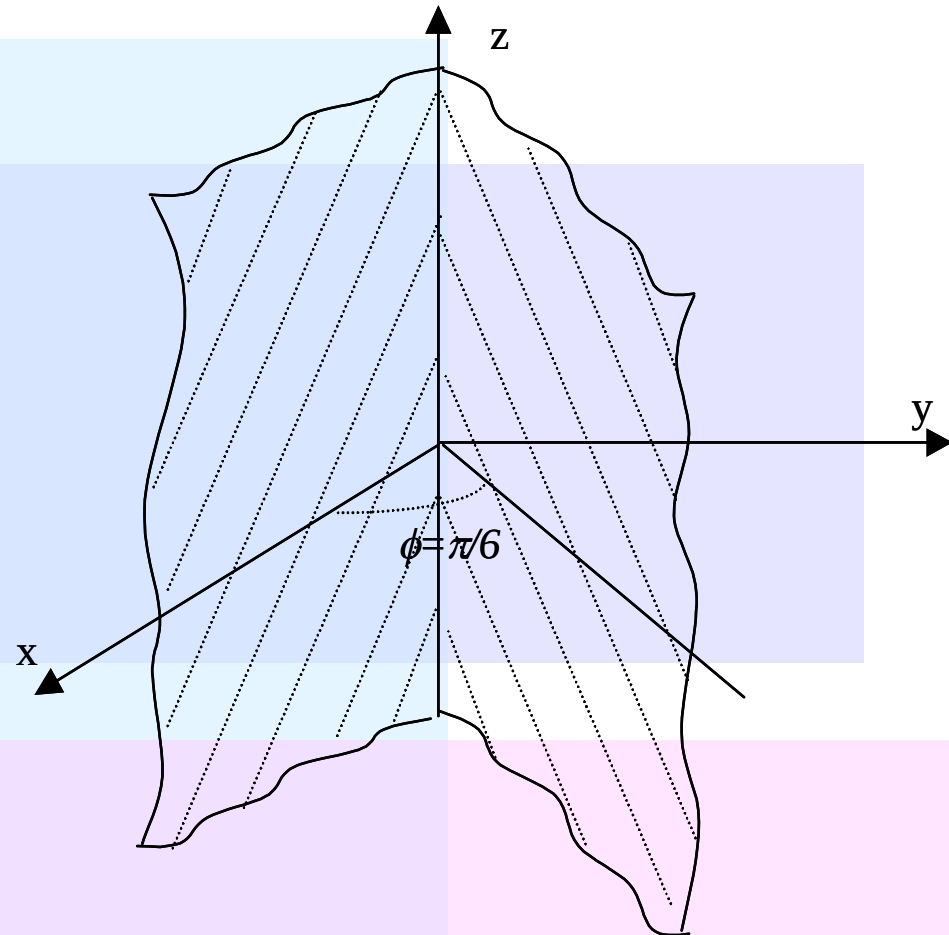
ECUACION DE LAPLACE

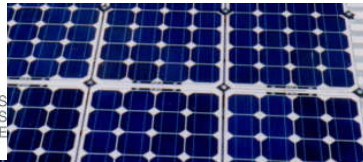
Luego

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.73)$$

Cuya solución es

$$V = A\phi + B$$

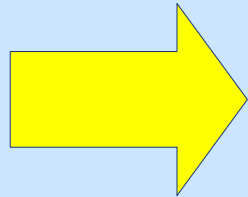




ECUACION DE LAPLACE

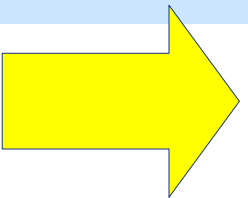
Condiciones de borde:

$$V(\phi=0, \rho, z) = 0$$



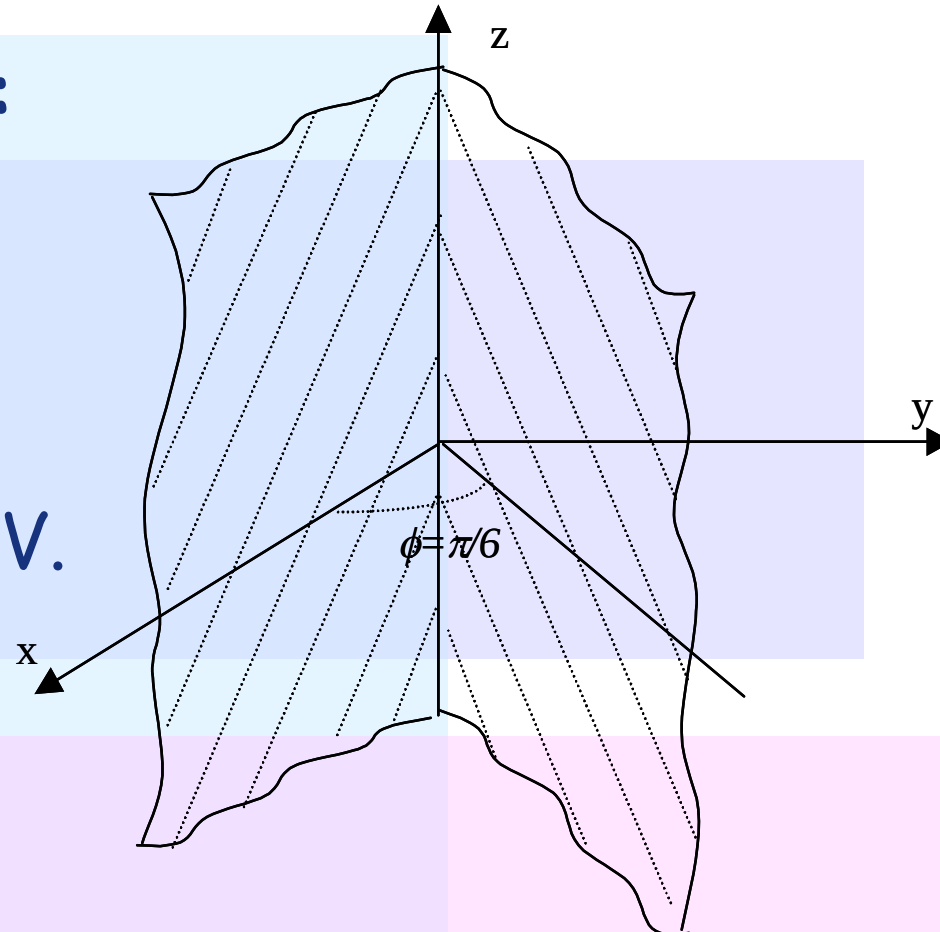
$$B=0$$

$$\gamma \quad V(\phi=\pi/6, \rho, z) = 100 \text{ V.}$$



$$100 = A\pi / 6$$

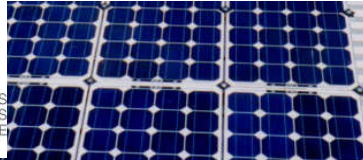
$$\Rightarrow A = \frac{600}{\pi}$$





fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



ECUACION DE LAPLACE

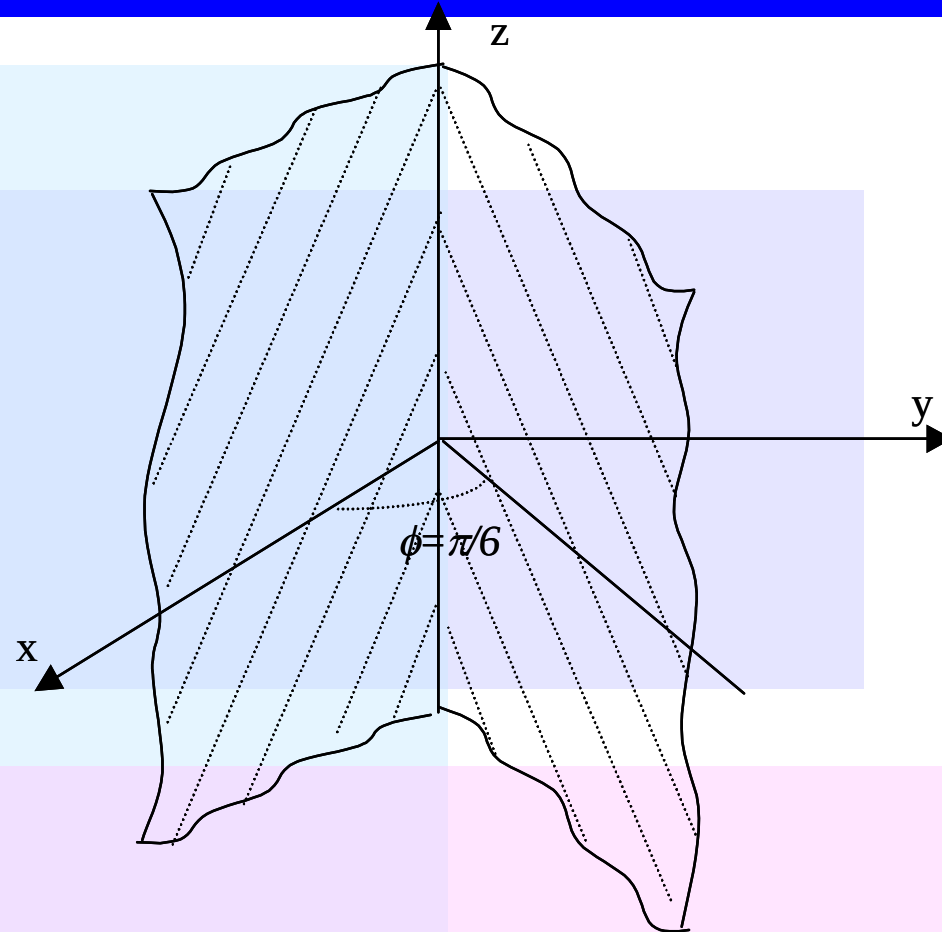
Luego el potencial es

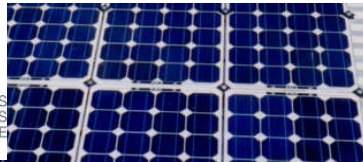
$$V = \frac{600}{\pi} \phi$$

y el campo

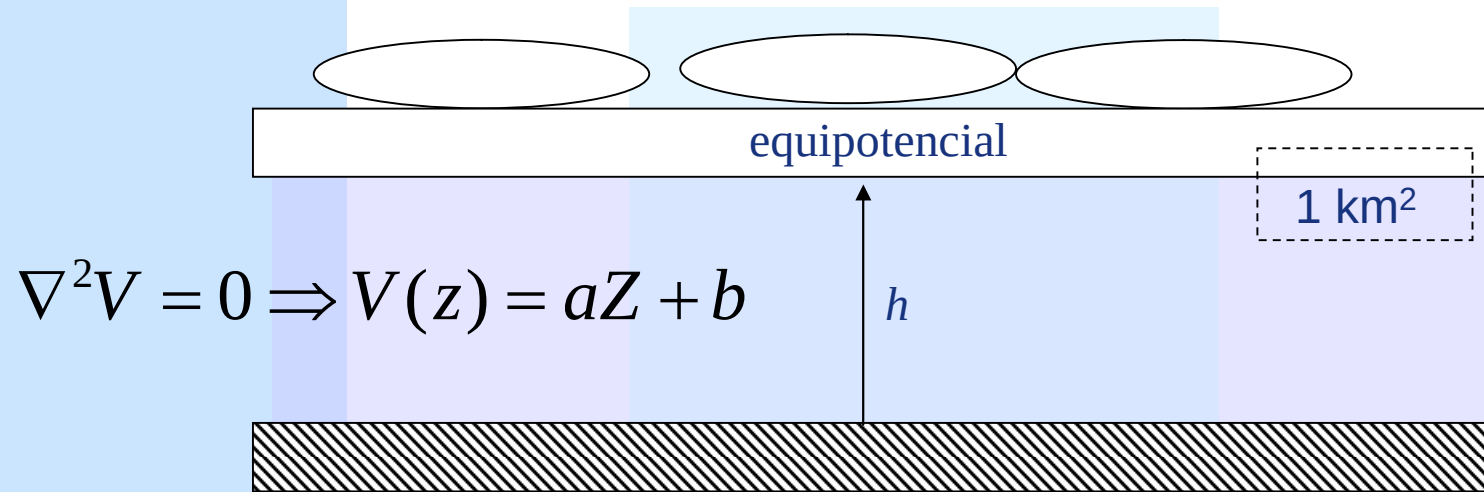
$$\vec{E}(r) = -\nabla V(r) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{600}{\pi \rho} \hat{\phi}$$



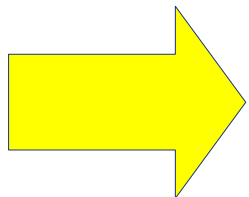


Ejemplo



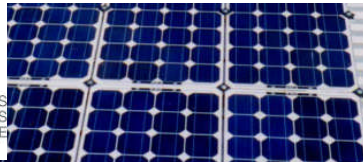
Condiciones de Borde

$$\left. \begin{array}{l} V(z=0) = 0 \quad y \\ V(z=1) = 5 \end{array} \right\} \therefore V(z) = 5z$$



$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -5\hat{k}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = -10\epsilon_0 \hat{k}$$



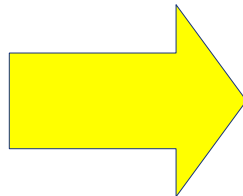
Campo Eléctrico Conservativo

Previa: Si $f(\vec{r})$ Es un campo escalar, entonces

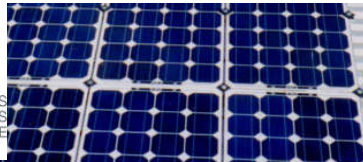
$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

luego, tomando el rotor de la ecuación

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$



$$\nabla \times \vec{E} = 0$$



Campo Eléctrico Conservativo

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Integrando en S

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Aplicando el
teorema de Stokes

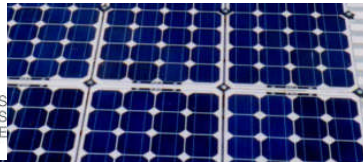
$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Donde $C(S)$ es el contorno que limita a la superficie S



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



Campo Eléctrico Conservativo

Luego

$$q \oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{C(S)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = W_{\text{neto}} = 0$$

La fuerza proveniente de un campo electroestático es una fuerza conservativa.