1. Problemas resueltos extras

Problema 1

Un disco circular de radio R tiene una densidad de carga superficial uniforme σ_0 . Calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje del disco a una altura z_0 del plano del disco. Se pide que el cálculo lo haga por integración directa.

Solución En este caso, la integral a calcular para conocer el campo, es una integral de superficie, donde la superficie es el disco de radio R .

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int_{\text{disco}} \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')dS}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (1)$$

Donde $\vec{r}$ es el un punto de observación cualquiera donde se está evaluando el campo, $\vec{r}'$ es la parametrización de la superficie en cuestión, y dS un elemento de superficie.

Utilizando coordenadas cilíndricas debido a la simetría que existe, obtenemos los siguientes:

$$\begin{aligned} dS &= \rho d\phi d\rho \\ \vec{r} &= z_0 \hat{k} \\ \vec{r}' &= \rho \hat{\rho} \end{aligned}$$

Reemplazando en la integral, obtenemos:

$$\vec{E}(z_0 \hat{k}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0(z_0 \hat{k} - \rho \hat{\rho}) \rho d\phi d\rho}{\sqrt{z_0^2 + \rho^2}^3}$$

Separando la integral en dos integrales de la siguiente forma:

$$\vec{E}(z_0 \hat{k}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 z_0 \hat{k} \rho d\phi d\rho}{\sqrt{z_0^2 + \rho^2}^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 \rho^2 \hat{\rho} d\phi d\rho}{\sqrt{z_0^2 + \rho^2}^3}$$

Ahora, se calcula la primera integral, notando que σ_0 , z_0 , y $\hat{k}$ son constantes dentro de la integral.

$$\frac{\sigma_0 z_0 \hat{k}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\phi d\rho}{\sqrt{z_0^2 + \rho^2}^3} = \frac{\sigma_0 z_0 \hat{k}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{z_0^2 + \rho^2}^3} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\sigma_0 z_0 \hat{k}}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{z_0^2 + \rho^2}^3}$$

Para calcular la última integral, se hace el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} u &= z_0^2 + \rho^2 \\ du &= 2\rho d\rho \end{aligned}$$

Con esto obtenemos:

$$\int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{z_0^2 + \rho^2}^3} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}^3} = \int \frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{\sqrt{z_0^2 + \rho^2}}$$

Con esto, el resultado de la primera integral es:

$$I_1 = \frac{z_0 \sigma_0}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 + \rho^2}} \Big|_0^R = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + R^2}}\right)$$

Es importante destacar que, en la segunda integral, el vector unitario $\hat{\rho}$ no es constante respecto a todas las variables de integracion. El vector unitario $\hat{\rho}$ tiene modulo constante y su direccion varia cuando solo al variar ϕ

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 \rho^2 \hat{\rho} d\phi d\rho}{\sqrt{z_0^2 + \rho^2}^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma_0 \rho^2 d\rho}{\sqrt{z_0^2 + \rho^2}^3} \int_0^{2\pi} \hat{\rho} d\phi$$

Y teniendo en cuenta que:

$$\int_0^{2\pi} \hat{\rho} d\phi = 0$$

La segunda integral del campo tiene valor cero.

NOTA: la integral $\int_0^{2\pi} \hat{\rho} d\phi$ es nula ya que, al variar ϕ entre 0 y 2π , el vector $\hat{\rho}$ da una vuelta completa en el circulo unitario, y como la integral se puede entender como una suma infinita de terminos, se esta sumando el vector mientras rota, por lo tanto, las componentes de un lado del circulo se anulan con las del otro lado del circulo, resultando finalmente 0.

El campo calculado entonces es:

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + R^2}}\right) \hat{k}$$

Problema 2

Un cilindro de altura L y radio R orientado a lo largo del eje z , posee una densidad de carga volumetrica no uniforme dada por $\rho = \rho_0 + \beta z$ con respecto a un origen en el centro del cilindro. Encuentre la fuerza que actua sobre una carga puntual (q) colocada en el centro del cilindro debido a la distribucion de carga no uniforme presente en el cilindro.

Solucion Primero calcularemos el campo electrico en el punto donde se ubica la carga, y luego con eso, obtenemos la fuerza. Entonces tenemos que:

$$\rho = \rho_0 + \beta z$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= \vec{0} \\ \vec{r} &= \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \\ dV &= \rho d\phi d\rho dz\end{aligned}$$

Donde $\vec{r}_0$ es el punto donde se esta observando el campo electrico, $\vec{r}$ es un punto cualquiera dentro del cilindro y dV un elemento de volumen en coordenadas cilindricas. Con esto, el campo electrico queda dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(\rho_0 + \beta z)(-\rho\hat{\rho} - z\hat{k})\rho d\phi d\rho dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3}$$

Separando las integrales obtenemos:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(\rho_0)(-\rho\hat{\rho} - z\hat{k})\rho d\phi d\rho dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(\beta z)(-\rho\hat{\rho} - z\hat{k})\rho d\phi d\rho dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^R \frac{-\rho_0\rho^2 d\rho dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} \int_0^{2\pi} \hat{\rho} d\phi + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho_0\rho\hat{k} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{z dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} d\phi d\rho \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^R \frac{-\beta z\rho^2 d\rho dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} \int_0^{2\pi} \hat{\rho} d\phi + \frac{\hat{k}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^R \frac{-\beta z^2\rho d\rho dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} \int_0^{2\pi} d\phi\end{aligned}$$

De estas 4 integrales, las primeras 3 son iguales a cero ya que:

$$\int_0^{2\pi} \hat{\rho} d\phi = 0$$

y ademas la integral:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{z dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} = 0$$

ya que se esta integrando una funcion impar entre limites simetricos. Con esto el campo queda como:

$$\vec{E} = \frac{\hat{k}}{2\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^R \frac{-\beta z^2\rho d\rho dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3}$$

Calculamos primero la integral con respecto a ρ .

$$\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} = -\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \Big|_0^R = -\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2}} = \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Ahora integramos respecto a z .

$$-\frac{\beta \hat{k}}{2\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{z^2}{|z|} dz - \frac{\beta \hat{k}}{2\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} dz$$

Estamos integrando dos funciones pares entre limites simetricos, por lo tanto:

$$-\frac{\beta \hat{k}}{\epsilon_0} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{z^2}{|z|} dz - \frac{\beta \hat{k}}{\epsilon_0} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} dz = -\frac{\beta \hat{k}}{\epsilon_0} \int_0^{\frac{L}{2}} z dz - \frac{\beta \hat{k}}{\epsilon_0} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} dz$$

Calculando la integral:

$$\int \frac{z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} dz = \frac{z\sqrt{z^2 + R^2}}{2} + \frac{R^2}{2} \ln(z + \sqrt{z^2 + R^2})$$

Con esto, el campo finalmente es:

$$\vec{E} = \frac{\beta}{2\epsilon_0} \left(\frac{L^2}{4} - \frac{L}{2} \sqrt{\frac{L^2 + R^2}{4}} + R^2 \ln\left(\frac{2L}{R} + \sqrt{\frac{L^2}{4R^2} + 1}\right) \right) \hat{k}$$

Y la fuerza es finalmente:

$$\vec{F}_q = q \frac{\beta}{2\epsilon_0} \left(\frac{L^2}{4} - \frac{L}{2} \sqrt{\frac{L^2 + R^2}{4}} + R^2 \ln\left(\frac{2L}{R} + \sqrt{\frac{L^2}{4R^2} + 1}\right) \right) \hat{k}$$

Problema 3

Se tiene un alambre de extension infinita con una densidad de carga uniforme λ_0 por unidad de logitud. Se pide calcular el campo electrico utilizando el teorema de Gauss.

Solucion Debido a la simetria del problema, utilizaremos coordenadas cilindricas. Notemos que el campo no depende de ϕ ni de z , debido justamente a la simetria cilindrica del problema, ademas, la direccion del campo debe apuntar solo en $\hat{\rho}$, por lo tanto tenemos que:

$$\vec{E} = E(\rho) \hat{\rho}$$

Ahora consideramos una superficie cilindrica de altura h y radio r para la cual aplicaremos el teorema de Gauss (La superficie incluye las tapas del cilindro, para que sea una superficie cerrada y sea aplicable el teorema). Primero notemos que:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{cilindro} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \oint_{tapas} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2$$

Donde $S = S_1 + S_2$. Pero, debido a que el campo es perpendicular a las normales de ambas tapas, las dos integrales de flujo sobre las tapas son nulas, por lo tanto, tenemos que:

$$d\vec{S}_1 = \rho d\phi dz \hat{\rho}$$
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{cilindro} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = \int_0^h \int_0^{2\pi} E(\rho) \hat{\rho} \cdot \rho d\phi dz \hat{\rho} = 2\pi \rho h E(\rho)$$

En esta ultima expresion, el campo no depende de z ni de ϕ , por lo tanto sale de la integral. Utilizando el teorema de Gauss, la ultima integral debe ser igual a la carga total encerrada por la superficie dividido por ϵ_0 .

$$2\pi \rho h E(\rho) = \frac{\lambda_0 h}{\epsilon_0}$$

Con esto concluimos que:

$$\vec{E} = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$$