Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

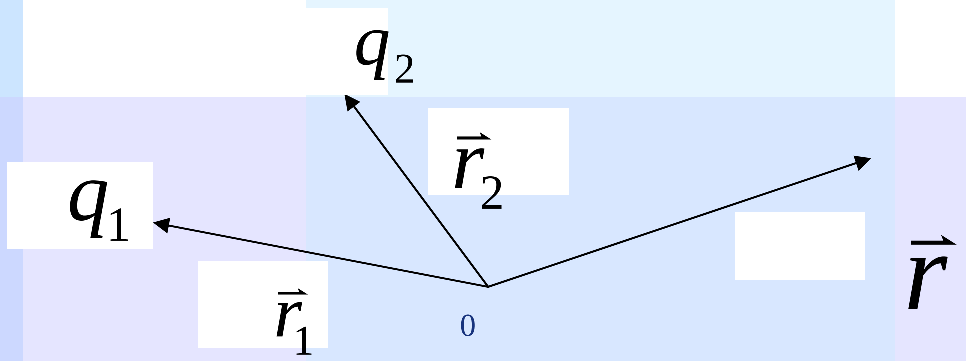
FI33A ELECTROMAGNETISMO

Clase 2

- Distribuciones continuas de carga
- Ley de Gauss

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

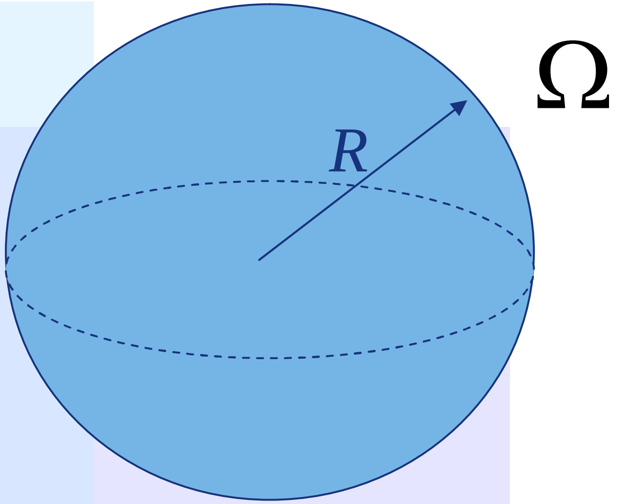
Campo Eléctrico de un Sistema de Cargas



$$\vec{E} = \sum_{k=1}^{m} \frac{q_k (\vec{r} - \vec{r}_k)}{4\pi \varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_k \|^3}$$

Distribuciones Continuas de Carga

Carga Total distribuida en forma uniforme en la esfera de radio R es Q



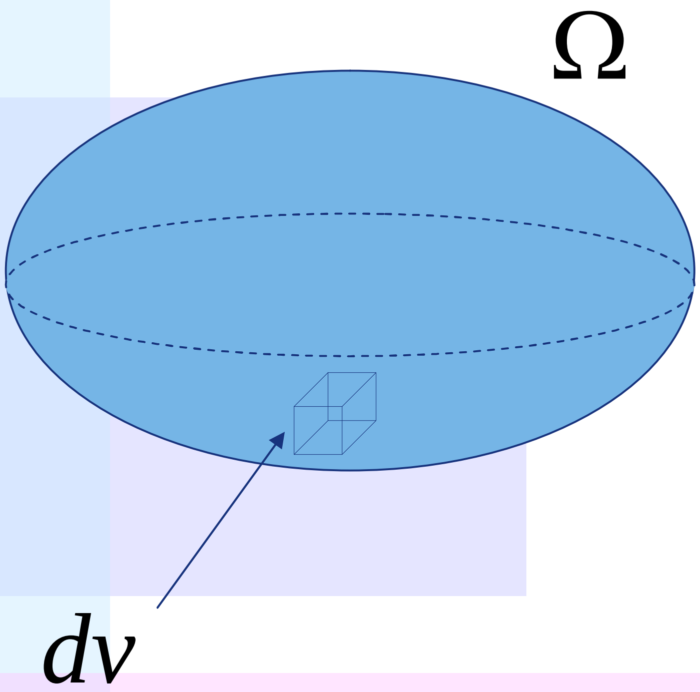
Podemos definir una densidad de carga por unidad de volumen ρ

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,[C/m^3]$$

Distribuciones Continuas de Carga

En general se define la densidad de carga por unidad de volumen *ρ(r)*

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta v} \frac{\Delta q}{\Delta v} [C/m^3]$$

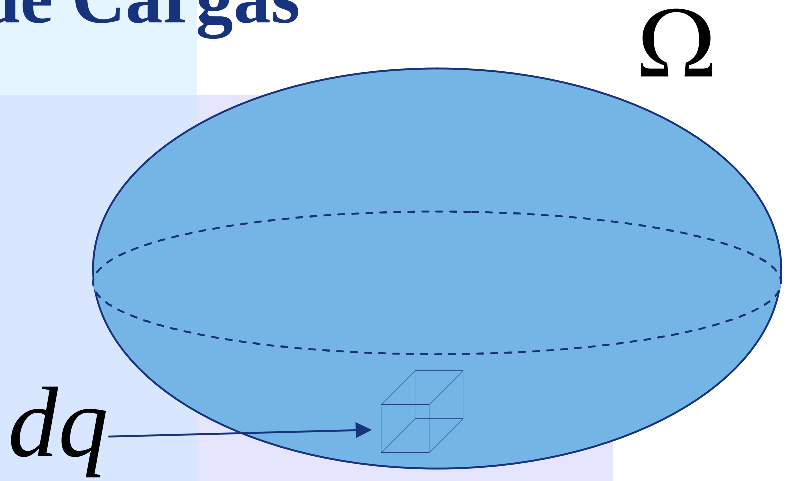


Luego si conocemos la densidad de carga *ρ*, la carga contenida en un elemento infinitesimal de volumen es

$$dq = \rho(\vec{r})dv \quad [C]$$

Distribuciones Continuas de Carga

Campo Eléctrico de un Sistema de Cargas



$$\vec{E} = \sum_{k=1}^{m} \frac{q_k(\vec{r} - \vec{r}_k)}{4\pi\,\varepsilon_0 \,\| \vec{r} - \vec{r}_k \|^3}$$

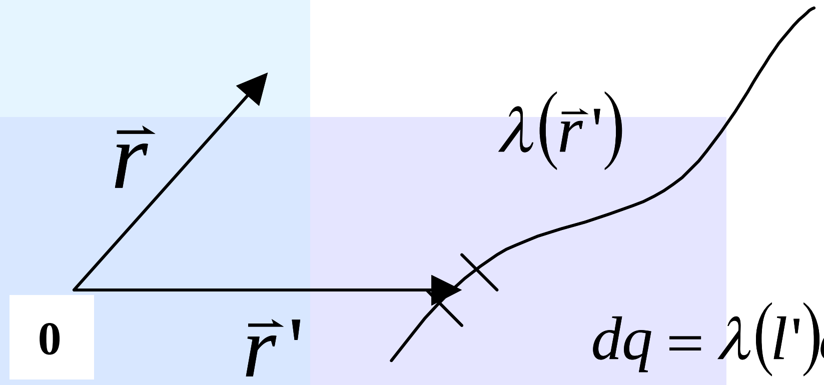
Para distribuciones contínuas de carga $\Sigma \rightarrow \int$ *y* $q \rightarrow dq$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int_{r'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|^3}\, dq \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|^3}\, \rho(\vec{r}\,')\, dv$$

Distribuciones Continuas de Carga

Para distribuciones lineales de carga usamos densidades lineales

$$\lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta l} \frac{\Delta q}{\Delta l} [C/m]$$



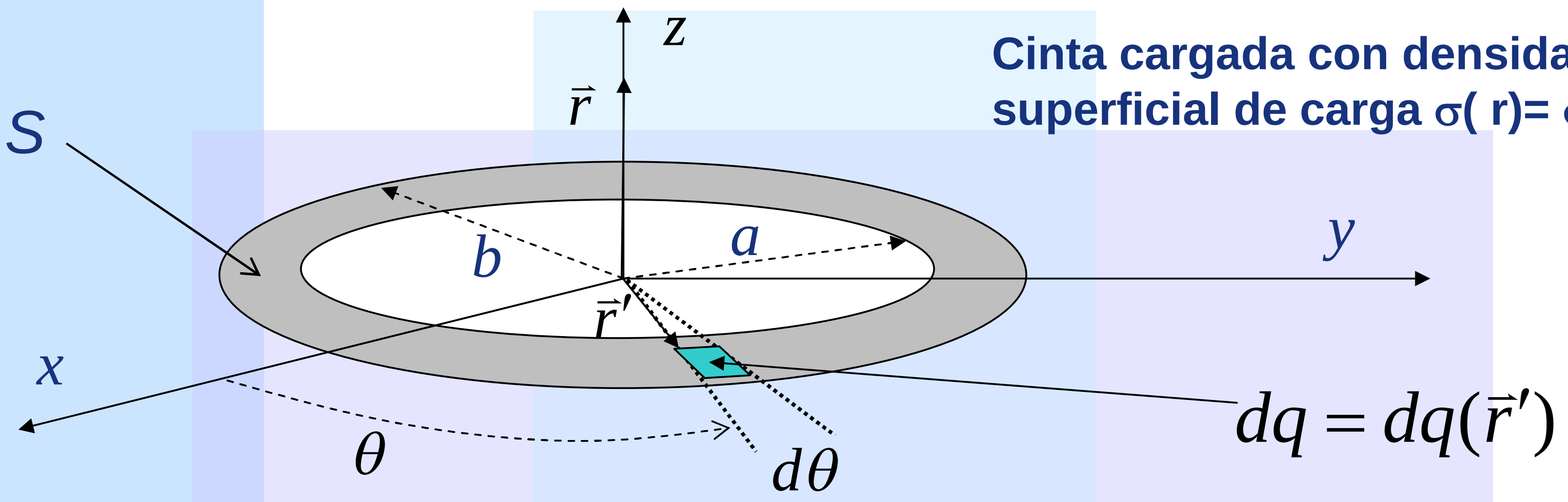
$$dq = \lambda(l')dl'$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int_{r'} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\, dq' \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int_{l_1}^{l_2} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\, \lambda(\vec{r}\,')dl'$$

Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

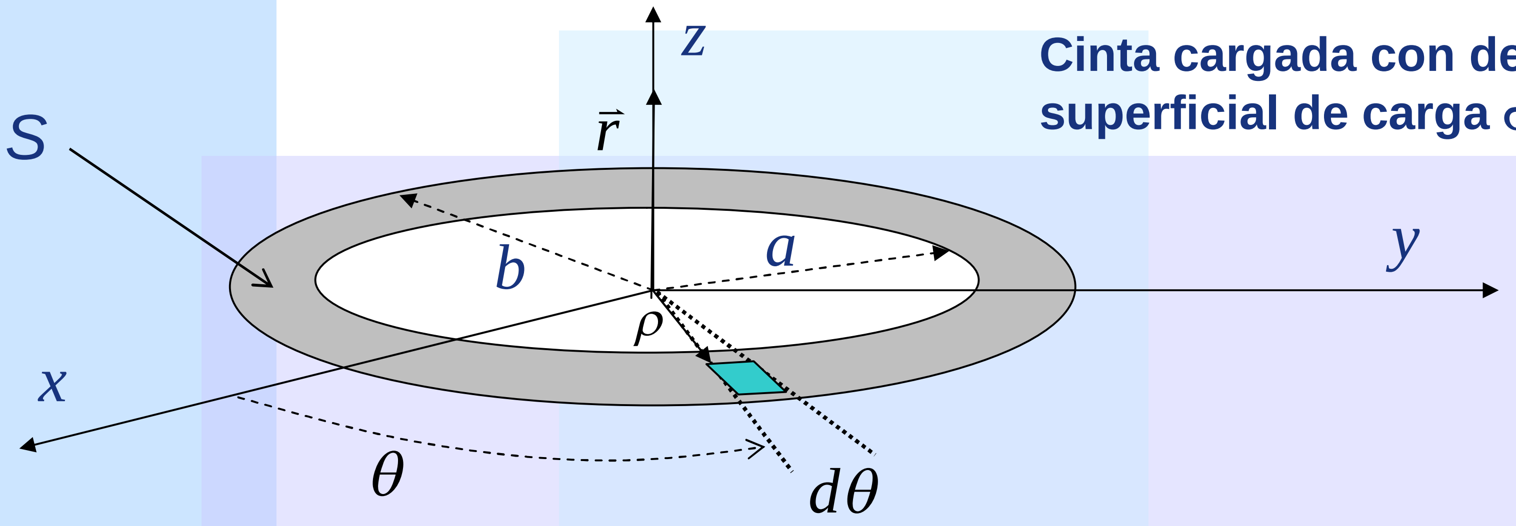
Ejemplo: Campo de cinta cargada en eje Z

Cinta cargada con densidad superficial de carga $\sigma(r) = \sigma_0$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}')}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|^3}$$

Ejemplo



Cinta cargada con densidad superficial de carga $\sigma(r)=\sigma_0$

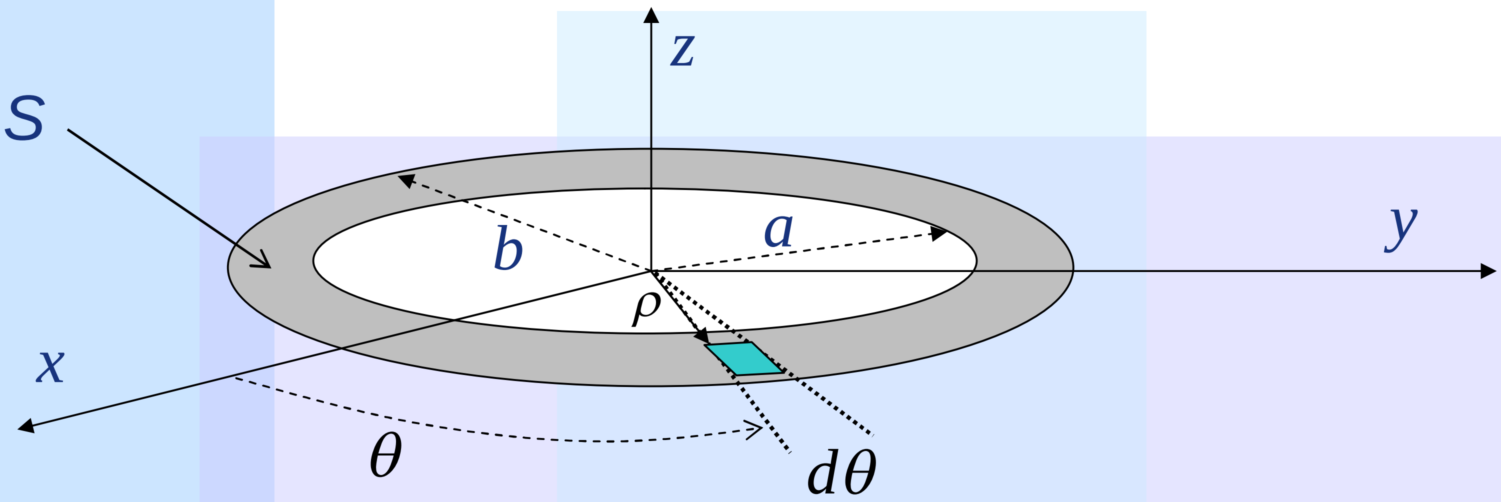
$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{dq(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|^3}$$

$$\vec{r}=z\hat{k} \qquad \vec{r}\,'=\rho\cos\theta\,\hat{i}+\rho\sin\theta\,\hat{j}$$

$$dq=\sigma\,ds=\sigma_0\rho\,d\theta\,d\rho$$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma_0\rho\,d\theta\,d\rho(-\rho\cos\theta\,\hat{i}-\rho\sin\theta\,\hat{j}+z\hat{k})}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Ejemplo



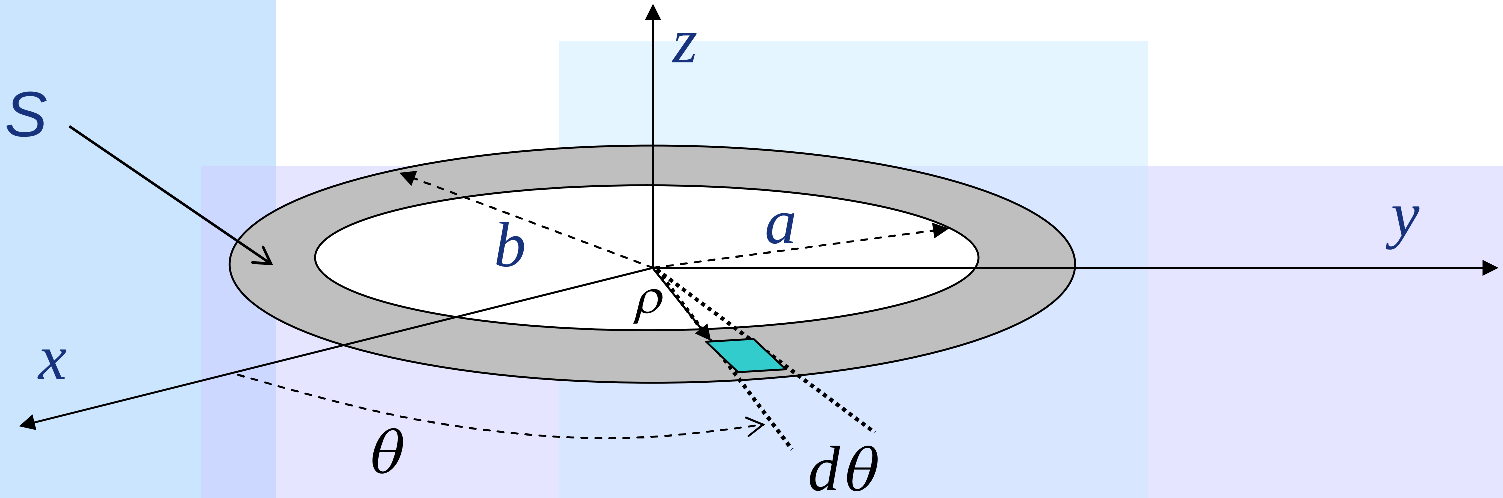
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$

$$\vec{r} = z\hat{k} \qquad \vec{r}\,' = \rho\cos\theta\,\hat{i} + \rho\sin\theta\,\hat{j}$$

$$dq = \sigma\,ds = \sigma_0 \rho\, d\theta\, d\rho$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\rho=a}^{\rho=b} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sigma_0 \rho\, d\theta\,(\cancel{-\rho\cos\theta\,\hat{i}} \cancel{-\rho\sin\theta\,\hat{j}} + z\hat{k})}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}\, d\rho$$

Ejemplo

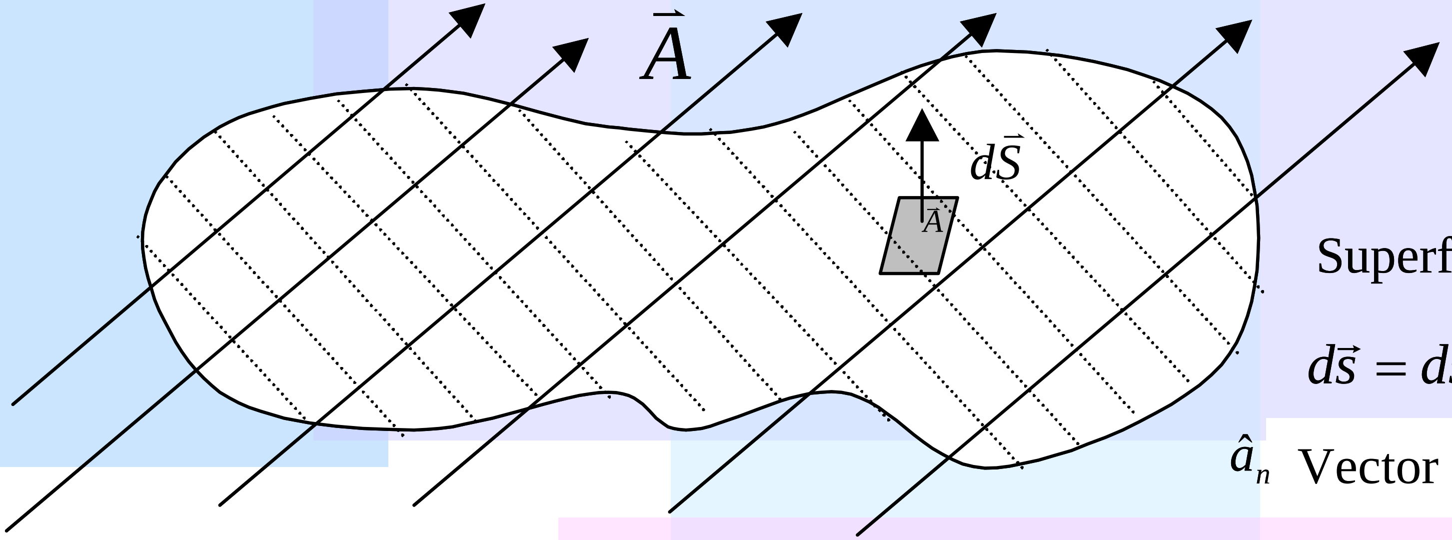


$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma_0 \rho z d\theta d\rho \hat{k}}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma_0 z 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\rho=a}^{\rho=b} \frac{\rho d\rho \hat{k}}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma_0 z}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{2\left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}}\right]_{\rho=a}^{\rho=b}\hat{k} = \frac{\sigma_0 z}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(a^2 + z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(b^2 + z^2\right)^{1/2}}\right)\hat{k}$$

LEY DE GAUSS: Conceptos previos

Flujo $\vec{A}$ campo vectorial definido en todo el espacio y una superficie S



Superficie S

$$d\vec{s} = ds \cdot \hat{a}_n$$

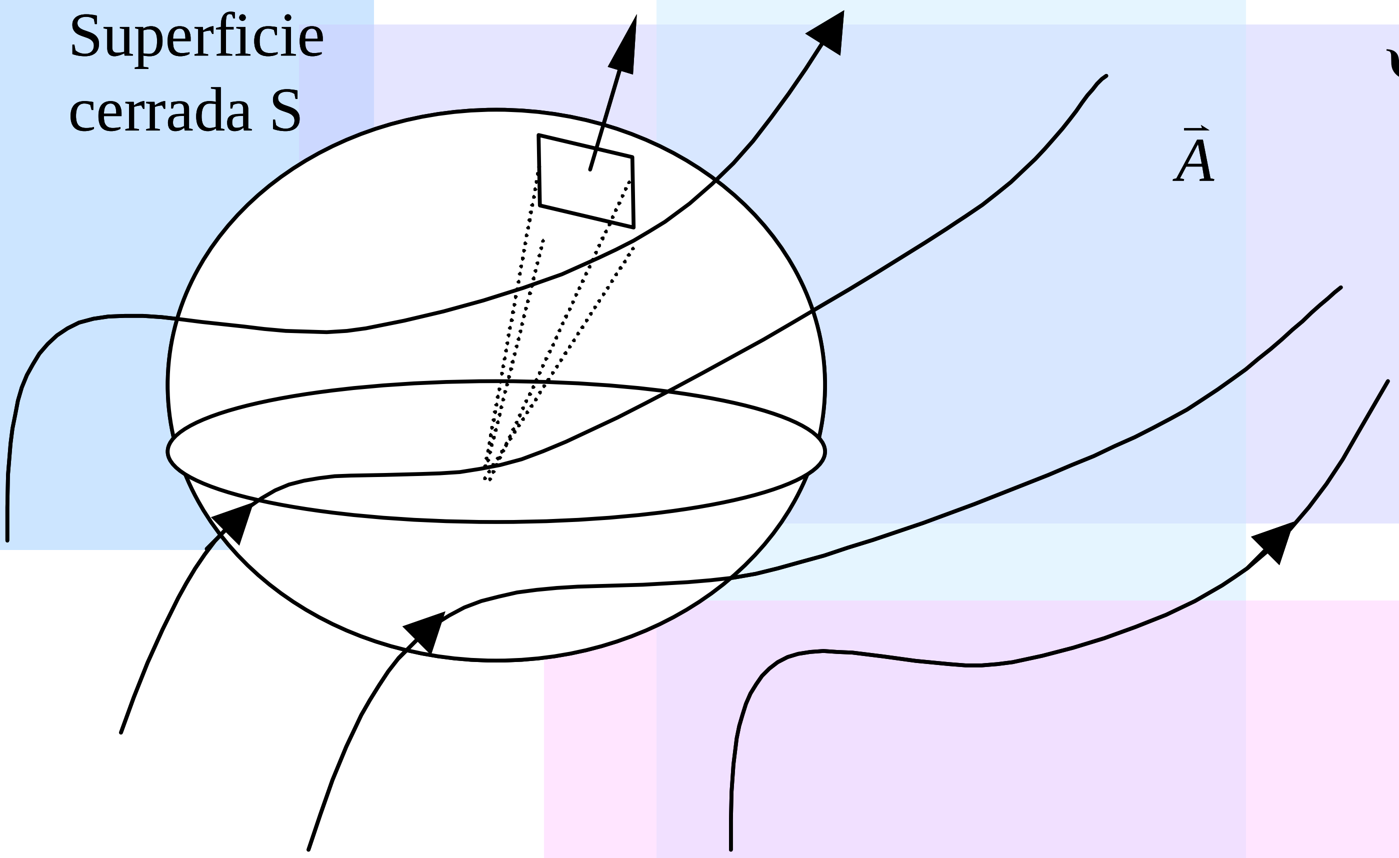
$\hat{a}_n$ Vector unitario normal a S

$$\Psi = \iint_S \vec{A} \bullet d\vec{s}$$

flujo ψ de a través de la superficie S

LEY DE GAUSS: Conceptos previos

$$d\vec{S} = dS \cdot \hat{a}_n$$



$$\Psi = \oiint_S \vec{A} \bullet d\vec{S}$$

Teorema de la divergencia

$$\oiint \vec{A} \bullet d\vec{S} = \iiint_{V(s)} \nabla \bullet \vec{A} dv \qquad (1.43)$$

$$\nabla = \frac{\partial \hat{i}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{j}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{k}}{\partial z}$$

Ley de Gauss

$$\Psi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga total encerrada por dicha superficie (Q_T) dividida por la constante ε_0

Ley de Gauss

Dado que $$Q_T = \iiint_V \rho dV$$

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

Luego, por el teorema de la divergencia

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \iiint_V \nabla \bullet \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

Entonces:

$$\boxed{\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

Ley de Gauss

Definimos Vector Desplazamiento $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

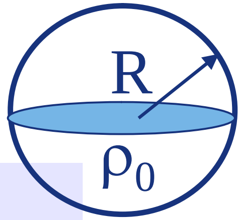
$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

Esta ecuación es la 1ª Ecuación de Maxwell.

Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

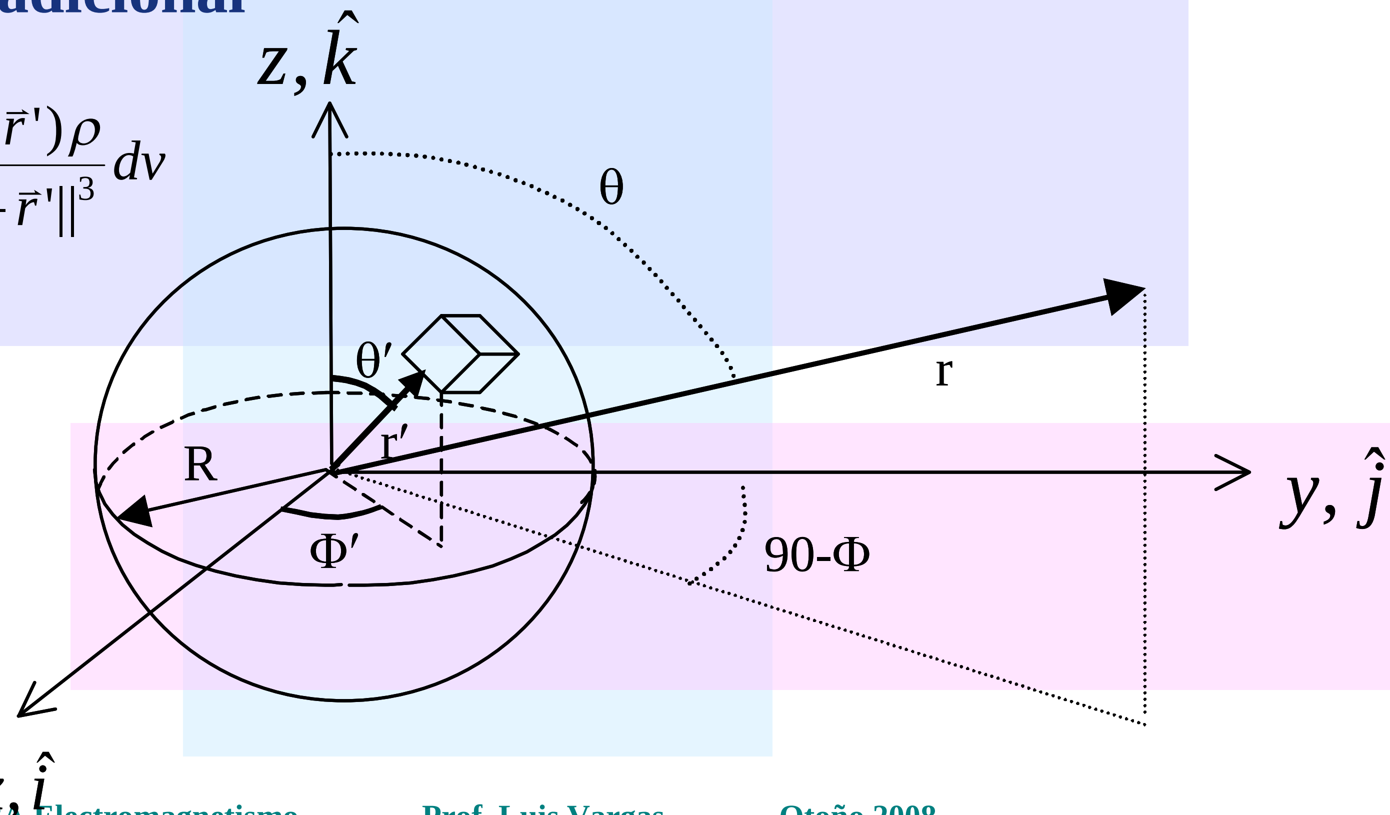
Ejemplo

Calcular el campo eléctrico en todo el espacio de una distribución homogénea de carga ρ_0 dispuesta en una esfera de radio R.

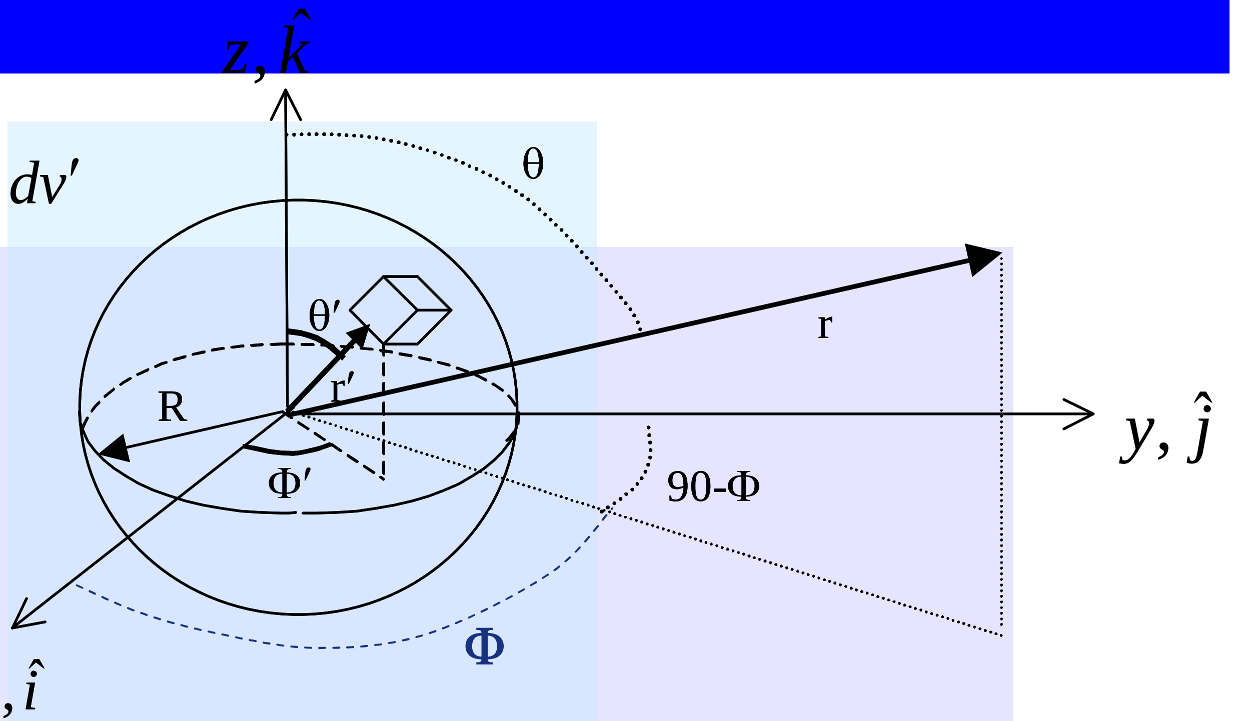


Sol^{n} **1. Método tradicional**

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underset{(r)}{\int_0^R} \underset{(\phi)}{\int_0^{2\pi}} \int_0^{\pi} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\rho}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} dv$$



$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\substack{0\\(r)}}^{R} \int_{\substack{0\\(\phi)}}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{(r - r')\rho}{\| r - r' \|^3} dv'$$



$$\vec{r}' = r'\sin\theta'\cos\phi'\hat{i} + r'\sin\theta'\sin\phi'\hat{j} + r'\cos\theta'\hat{k}$$

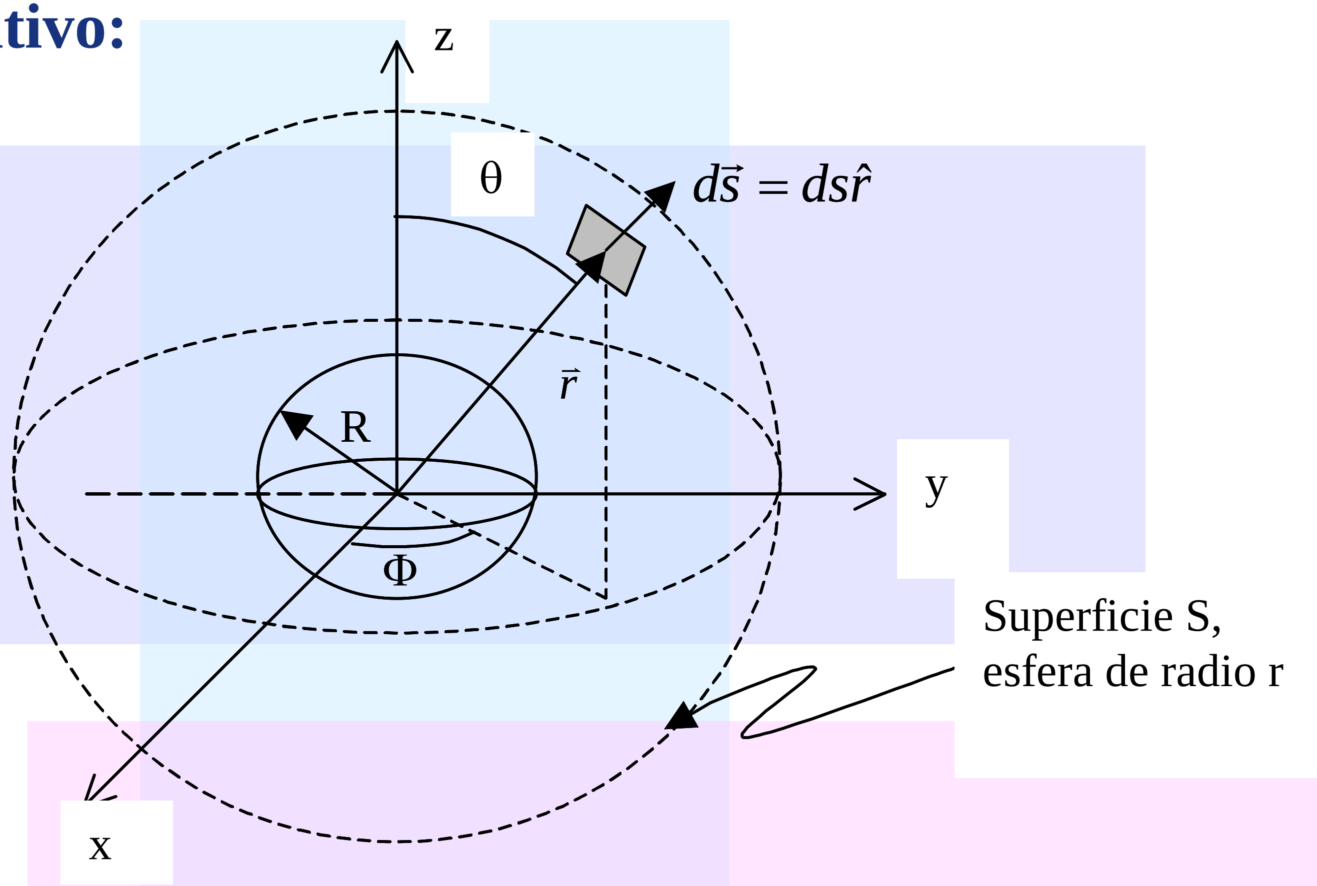
$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\hat{i} + r\sin\theta\sin\phi\hat{j} + r\cos\theta\hat{k}$$

$$dv' = r'd\theta'\, r'\sin\theta'\, d\phi'\, dr'$$

$$dv' = r'^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\phi'\, dr'$$

2. Método alternativo:

Ley de Gauss



Para r > R

$$\oint\!\!\!\oint \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

Calculemos la carga total encerrada en S.

$$Q = \iiint \rho_0 \, dv$$

$$Q = \int_{(r)}^{R} \int_{(\phi)}^{2\pi} \int_{(\theta)}^{\pi} \rho_0 r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho_0 r^2 \underbrace{(-\cos\theta)_0^{\pi}}_{1-(-1)=2} d\phi dr$$

$$Q = \int_0^R \rho_0 r^2 2 \cdot 2\pi dr$$

$$Q = \rho_0 \frac{R^3}{3} 4\pi$$

Por simetría $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{E}(\vec{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}}$

$$d\vec{S} = rd\theta \cdot r\sin\theta d\phi\hat{r} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi\hat{r}$$

$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(\vec{r})\hat{r} \bullet r^2 \sin\theta d\theta d\theta d\phi\hat{r}$$

$$\cdots = \int_0^{\pi} 2\pi E(\vec{r}) r^2 \sin\theta d\theta = 2\pi E(\vec{r}) r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta$$

$$\cdots = E(\vec{r}) 2\pi\, r^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 4\pi\, r^2 E(\vec{r})$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(\vec{r}) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$\therefore E(\vec{r}) = \frac{R^3}{3r^2}\rho\,\hat{r}$$

Comentarios sobre la Ley de Gauss

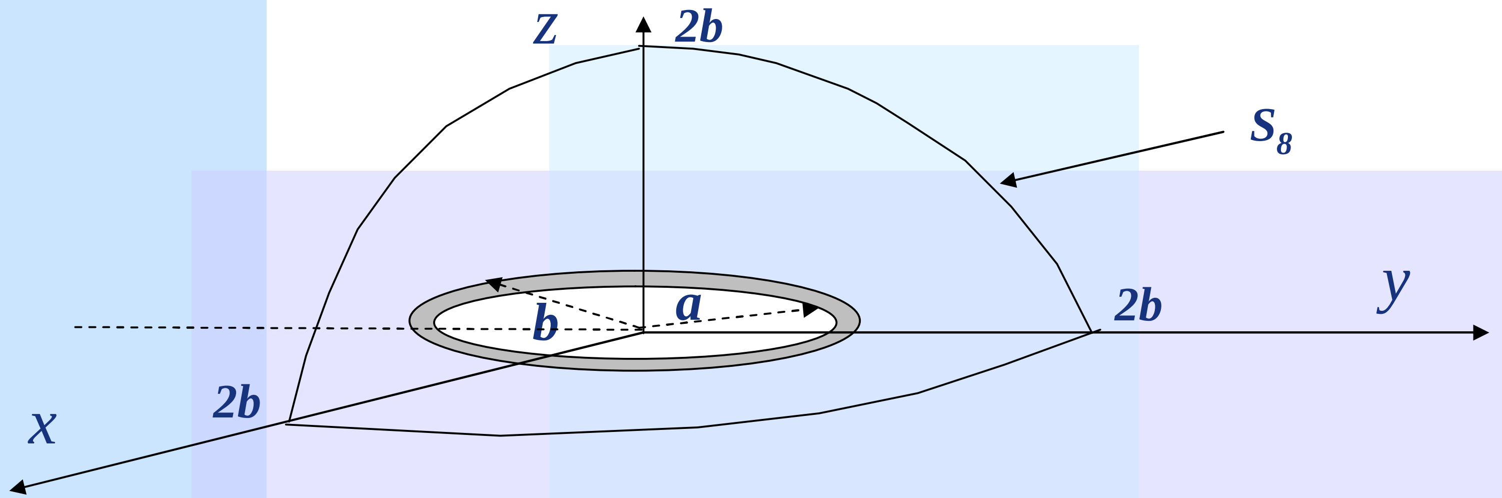
i) La ley de Gauss es útil cuando hay simetría,

ii) La ley de Gauss es válida para todo el espacio,

iii) Aplicarla requiere cierta destreza (la que se logra con práctica).

Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

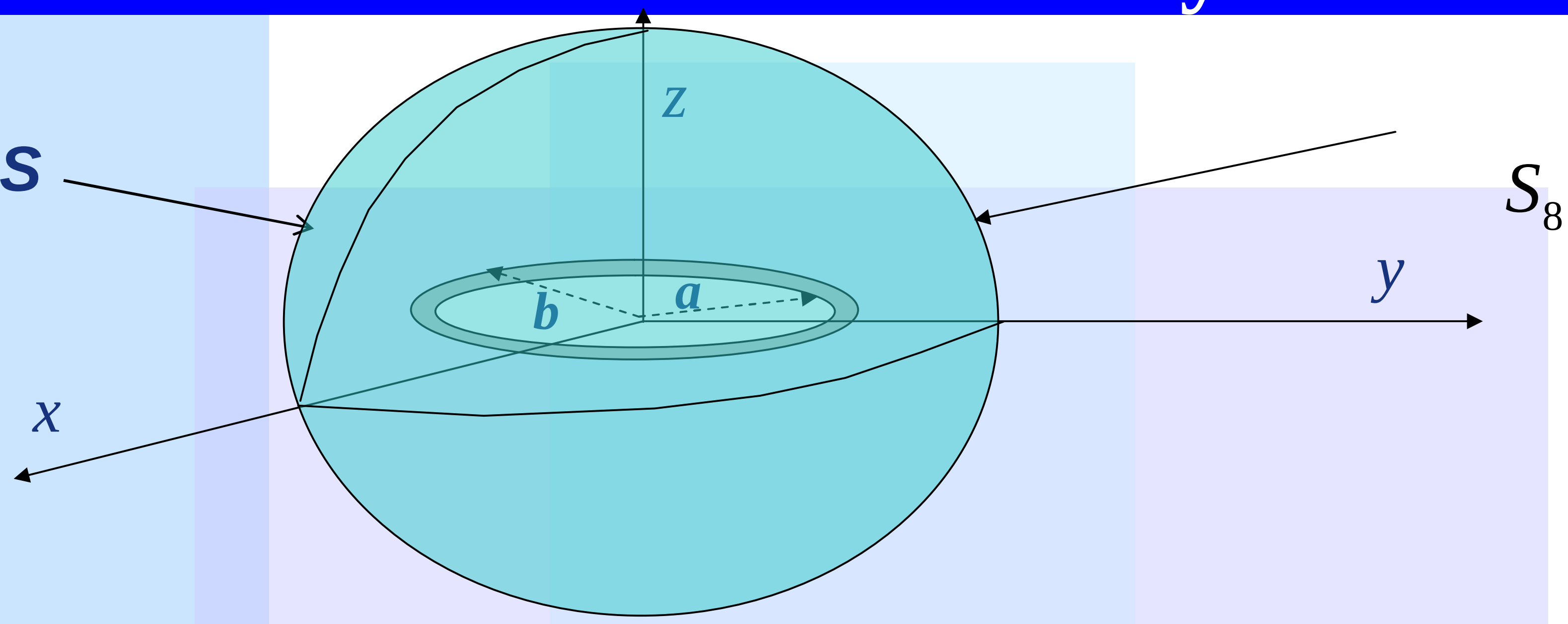
Comentarios sobre la Ley de Gauss



Calcular el flujo de campo eléctrico en la superficie S definida por el segmento de casquete esférico ubicado en el cuadrante (x>0 y>0, z>0) y que intersecta en x=y=z=2b.

$$\iint_{S_8} \vec{E} \bullet d\vec{s} = ?$$

Comentarios sobre la Ley de Gauss



$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = 8\iint_{s_8} \vec{E} \bullet d\vec{s}$$

$$Q = \iint_\Lambda \sigma ds = \pi(b^2 - a^2)\sigma_0$$

$$\iint_{s_8} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\pi(b^2 - a^2)\sigma_0}{8\varepsilon_0}$$