UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA
Avda. Tupper 2007 – Casilla 412-3 - Santiago – Chile
Fono: (56) (2) 678 4210, Fax: (56) (2) 695 3881

APUNTES DE ELECTROMAGNETISMO

CAPITULO 6 MAGNETOSTÁTICA

Luis Vargas D.

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Versión Otoño 2008

INDICE

CAPITULO 6. MAGNETOSTÁTICA **3**
6.1 Introducción **3**
6.2 Fuerza de una Corriente sobre una Carga Eléctrica **3**
6.3 Definición de campo magnético **5**
6.4 Ley de Biot y Savarat **8**
6.5 Ley Circuital de Ampere **13**
6.6 3ª Ecuación de Maxwell **15**
6.7 4ta Ecuación de Maxwell **16**
6.8 Movimiento de una carga puntual en el interior de un campo magnético **16**
6.9 Potencial Magnético Vectorial **20**
6.10 Dipolo Magnético **23**
6.12 Modelo Atómico de Materiales **27**
6.13 Corrientes de Magnetización **28**
6.14 Permeabilidad Magnética **29**
6.15 Clasificación de los Materiales Magnéticos **30**
6.16 Condiciones de borde **32**
6.17 Resumen **34**
6.18 Problemas Resueltos **35**
6.18 Problemas Propuestos **53**

INDICE FIGURAS

¡Error! No se encuentran elementos de tabla de ilustraciones.

INDICE TABLAS

Tabla 4. Permeabilidad Relativa de Algunos Materiales* 31

CAPITULO 6. MAGNETOSTÁTICA

6.1 Introducción

El estudio de la magnetostática comprende el fenómeno del campo magnético producido por corrientes estacionarias. O sea, se cumple $\vec{J} = \text{constante}$ en el tiempo y $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ campos no dependen del tiempo.

A pesar de que los efectos magnéticos de los imanes se conocían ya en la antigua Grecia, fue Oersted quien en 1819 propuso un primer modelo para explicar la desviación que sufre la aguja de una brújula por la acción de una corriente eléctrica. Sus resultados condujeron a la determinación de la fuerza que experimenta una carga en presencia de una corriente eléctrica, y posteriormente a la de las fuerzas entre circuitos eléctricos.

Para presentar estos conceptos, seguiremos un tratamiento análogo al de electrostática, esto es, primero veremos la fuerza sobre una carga y luego definiremos el concepto de campo magnético a partir de esa fuerza. Posteriormente extenderemos el concepto a circuitos eléctricos en general.

6.2 Fuerza de una Corriente sobre una Carga Eléctrica

Consideremos una carga eléctrica q con velocidad $\vec{u}$ y una corriente *I* que circula a través de un circuito eléctrico (que llamaremos *Γ'*) según se muestra en la Figura 128.

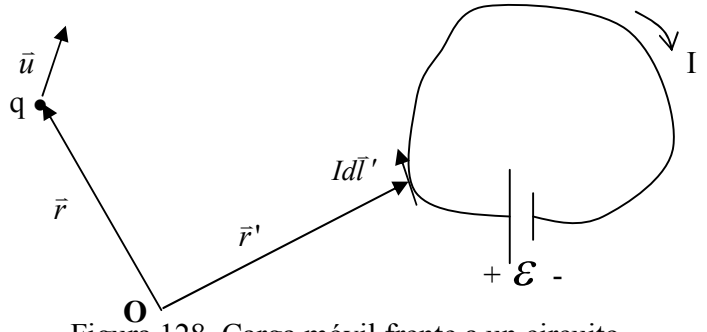


Figura 128. Carga móvil frente a un circuito.

Se encuentra experimentalmente que la fuerza que experimenta la carga está definida por la expresión:

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|^3} \qquad (6.1)$$

donde:

$\vec{u}$ es la velocidad de carga q

$Id\vec{l}'$ es el elemento diferencial de corriente por el circuito Γ'

$\vec{r}$ indica la posición de q

$\vec{r}\,'$ recorre el circuito Γ' indicando la posición del elemento $Id\vec{l}\,'$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}[H/m]$ es una constante llamada permeabilidad del aire.

EJEMPLO 32

Calcule la fuerza que ejerce un circuito circular de radio R y corriente I sobre una carga q ubicada en la posición $z = z_0$, para los siguientes casos:

i) La carga esta inmóvil

ii) Carga se mueve con velocidad inicial $\vec{u} = v_o\hat{k}$

iii) Carga se mueve con velocidad inicial $\vec{u} = v_o\hat{j}$

iv) Carga se mueve con velocidad inicial $\vec{u} = v_o\hat{j}$.

Solución:

Consideremos la configuración de la Figura 129.

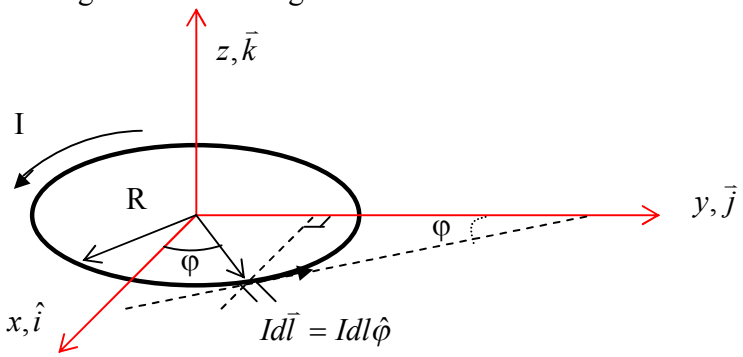


Figura 129. Circuito circular.

Primero calculamos la integral de línea $\oint_{\Gamma'}$ sobre el circuito circular, de radio R y corriente I, sobre el eje z. Aquí Γ' es el círculo de radio R del circuito. Tenemos

$$Id\vec{l} = Idl\hat{\varphi} = Idl\left(-sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j}\right), \quad dl = Rd\varphi$$

$$\vec{r}\,' = R\hat{\rho} = R(\cos\varphi\hat{i} + \sin\varphi\hat{j})$$

$$\vec{r} = z\hat{k}$$

$$\vec{r} - \vec{r}\,' = -R\cos\varphi\hat{i} - R\sin\varphi\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\left\|\vec{r} - \vec{r}\,'\right\| = \left[R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi + z^2\right]^{1/2} = \left[R^2 + z^2\right]^{1/2}$$

luego :

$$\oint_{\Gamma'} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\varphi}{\left[R^2+z^2\right]^{3/2}}\left(-\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j}\right)\times\left(-R\cos\varphi\hat{i} - R\sin\varphi\hat{j} + z\hat{k}\right)$$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma'} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 IRd\varphi}{4\pi\left[R^2+z^2\right]^{3/2}}\left[R\sin^2\varphi\hat{k} + z\sin\varphi\hat{j} + R\cos^2\varphi\hat{k} + z\cos\varphi\hat{i}\right]$$

$$\oint_{\Gamma'} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 IRd\varphi}{4\pi\left[R^2+z^2\right]^{3/2}}\left[z\cos\varphi\hat{i} + z\sin\varphi\hat{j} + R\hat{k}\right]$$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma'} = \frac{\mu_0 IR^2 2\pi}{4\pi\left[R^2+z^2\right]^{3/2}}\hat{k}$$

Luego la expresión para la Fuerza sobre una carga q en la posición z es:

$$\vec{F} = q\frac{\mu_0 IR^2}{2\left[R^2+z^2\right]^{3/2}}\vec{u}\times\hat{k} \quad (6.2)$$

Entonces:

i) Si la carga está estática $(\vec{u}=0)$ permanece estática $\vec{F}=0$.

ii) Si tiene una velocidad inicial $\vec{v}_o = v_0\hat{k}$ se tiene $\vec{F}=0$, es decir, la carga sigue moviéndose con la misma velocidad.

iii) Si se le da una velocidad inicial en el sentido ĵ, i.e., $\vec{v}_o = v_0\hat{j}$ experimenta una fuerza dada por la expresión:

$$\vec{F}_q = qv_0\cdot\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{\left(R^2+z_0^2\right)^{3/2}}\left(\hat{i}\right) \quad (6.3)$$

iv) Si la velocidad inicial es ahora $\vec{v}_o = v_0\hat{i}$, la fuerza que experimenta q es:

$$\vec{F}_q = qv_0\cdot\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{\left(R^2+z_0^2\right)^{3/2}}\left(-\hat{j}\right) \quad (6.4)$$

6.3 Definición de campo magnético

Habíamos dicho que la expresión de la fuerza que produce un circuito sobre una carga tiene la forma

$$\vec{F} = q\vec{u}\times\oint_{\Gamma'}\frac{\mu_0 Id\vec{l}\,'\times\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)}{4\pi\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|^3}$$

Es importante notar que las variables que definen a la carga se encuentran fuera de la integral. Por otra parte, al interior de la integral sólo se encuentran los parámetros del circuito Γ' y la corriente que circula a través de él. Así, el efecto que produce la circulación de la corriente está contenido completamente en la integral. Se define el campo magnético que produce el circuito como

$$\Rightarrow \vec{B} = \int_{\Gamma'}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\,'\times\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|^3} \quad (6.5)$$

Este campo magnético corresponde a un campo vectorial que representa la perturbación en todo el espacio que aparece como resultado de la circulación de la corriente I.

Con ello, la fuerza que sufre una carga en presencia de $\vec{B}$ es:

$$\vec{F} = q\vec{u}\times\vec{B} \quad (6.6)$$

Esta es la llamada Fuerza de Lorentz que veremos en detalle más adelante.

Las unidades del campo magnético se obtienen de

$$[F]=[q][V][B]\Rightarrow[B]=\frac{[F]}{[q][V]}=\frac{[N]}{[C][m/seg]}$$

Se define

$$1\,Tesla=[T]=\left[\frac{N}{C\times m/seg}\right]$$

O sea, una carga de 1[C] que se mueve con velocidad de 1[m/s] en presencia de un campo magnético de 1[T] experimenta la fuerza de 1[N]. En la práctica el Tesla resulta ser una unidad muy grande, por ello se acostumbra usar el Gauss [G], con la equivalencia

$$1[T]=10^4[G]$$

EJEMPLO 33

Determine el campo magnético del circuito circular del ejemplo anterior en los siguientes puntos:

a) Cualquier punto del eje z.
b) Obtenga una expresión para el campo en cualquier punto del plano x-y, con $x^2+y^2>R^2$.

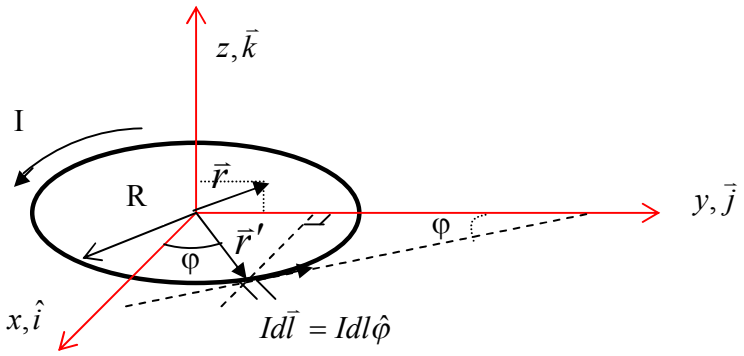


Figura 130. Campo magnético de circuito circular.

a) Para el ejemplo anterior tenemos que el campo magnético producido por el circuito circular en el punto z_0 del eje z es

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{\left(R^2+z_0^2\right)^{3/2}}\hat{k}\quad(6.7)$$

Por lo tanto, dejando variable z_0, el campo en cualquier punto z será

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{k}\quad(6.8)$$

b) Tenemos

$$Id\vec{l}=Idl\hat{\varphi}=Idl\left(-sin\varphi\hat{i}+\cos\varphi\hat{j}\right),\qquad dl=Rd\varphi$$

$$\vec{r}\,'=R\hat{\rho}=R(\cos\varphi\hat{i}+\sin\varphi\hat{j})$$

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$$

$$\vec{r}-\vec{r}\,'=(x-R\cos\varphi)\vec{i}+(y-R\sin\varphi)\hat{j}$$

$$\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|=\left[R^2\cos^2\varphi+R^2\sin^2\varphi-2Ry\sin\varphi-2Rx\cos\varphi+y^2+x^2\right]^{1/2}$$

$$\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|=\left[R^2-2Rx\cos\varphi-2Ry\sin\varphi+x^2+y^2\right]^{1/2}$$

$$\vec{B}=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\varphi}{\left[R^2-2Ry\sin\varphi-2Rx\cos\varphi+y^2+x^2\right]^{3/2}}\left(-\sin\varphi\hat{i}+\cos\varphi\hat{j}\right)\times\left((x-R\cos\varphi)\hat{i}+(y-R\sin\varphi)\hat{j}\right)$$

$$\Rightarrow\vec{B}=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 IRd\varphi}{4\pi\left[R^2-2Ry\sin\varphi-2Rx\cos\varphi+y^2+x^2\right]^{3/2}}\left[(R\sin^2\varphi-y\sin\varphi)\hat{k}+(R\cos^2\varphi-x\cos\varphi)\hat{k}\right]$$

$$\Rightarrow\vec{B}=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 IRd\varphi}{4\pi\left[R^2-2Ry\sin\varphi-2Rx\cos\varphi+y^2+x^2\right]^{3/2}}\left[(R-y\sin\varphi-x\cos\varphi)\hat{k}\right]$$

El problema es ahora resolver esta integral, ¡cosa nada fácil! (tratar de hacerlo). De cualquier forma, el campo en el plano x-y sólo tiene componente según $\hat{k}$ y será positivo si está dentro del círculo y negativo fuera de él (conviene hacer el esfuerzo de esta visualización).

Campo Magnético Producido por una Carga Puntual

Consideremos una carga puntual q moviéndose con velocidad $\vec{u}$, según se muestran en la Figura 131.

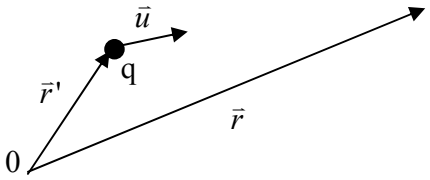


Figura 131. Campo magnético de carga puntual.

Usando la expresión que habíamos definido para el campo magnético del circuito en este caso el campo magnético que produce la carga es:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\vec{l}\times\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|^3}\quad(6.9)$$

pero aquí $Id\vec{l}=\frac{dq}{dt}dl\hat{u}=dq\frac{dl}{dt}\hat{u}$, pero $dq\to q$, $\frac{dl}{dt}=\|\vec{u}\|$ y $d\vec{B}\to\vec{B}$

$$\Rightarrow\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}q\vec{u}\times\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left\|\vec{r}-\vec{r}'\right\|^3}\quad(6.10)$$ es el campo producido por una carga en movimiento.

Campo magnético producido por distribuciones de corriente

Para el caso de distribuciones de corriente en volumen como las de la Figura 132 se usa el vector densidad de corriente.

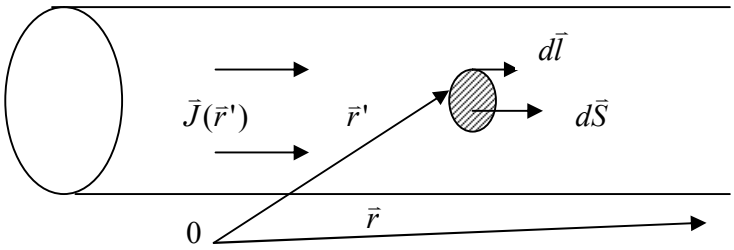


Figura 132. Campo magnético de distribuciones de corrientes.

Aquí $Id\vec{l} = \vec{J} \cdot d\vec{S} \cdot d\vec{l} = \vec{J} dV'$, por lo tanto el campo magnético es:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3} dV' \quad (6.11)$$

donde V' es todo el volumen en donde hay $\vec{J}$.

Así entonces, el efecto que produce una corriente puede representarse a través de su campo magnético, el cual provoca una perturbación en todo el espacio y puede medirse ya sea poniendo una carga en movimiento o con un circuito adicional. En ambos casos se observarán fuerzas que actuarán sobre estos últimos elementos (carga y/o circuito se moverán).

6.4 Ley de Biot y Savarat

En 1820 Jean Baptiste Biot y Felix Savarat generalizan los resultados obtenidos por Oersted. Estos resultados fueron presentados 1 mes después por Ampere. Consideremos dos circuitos que llevan corrientes I e I' según se muestra en la figura siguiente:

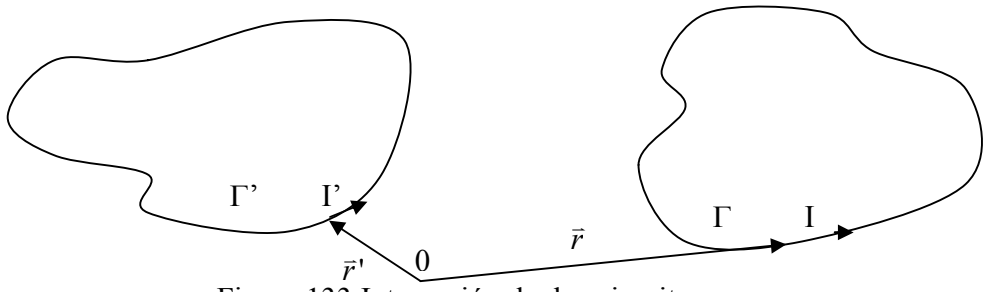


Figura 133.Interacción de dos circuitos.

Biot y Savarat demostraron que la fuerza neta que ejerce el circuito Γ' sobre Γ esta dada por la expresión:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} \frac{I' Id\vec{l} \times \left(d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')\right)}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3} \quad (6.12)$$

La expresión diferencial de esta ecuación, que indica la fuerza que ejerce el circuito Γ' sobre el elemento $Id\vec{l}$ del circuito Γ es

$$d\vec{F} = \frac{Id\vec{l} \times \mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I' d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3} \quad (6.13)$$

ó

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (6.14)$$

donde $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I' d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}$ (6.15) es el campo magnético producido por el circuito Γ' en $\vec{r}$.

Notar que una vez determinado el campo magnético del circuito Γ', podemos calcular la fuerza sobre el otro circuito ocupando la fórmula $\vec{F} = \oint_{\Gamma} Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$ (6.16).

EJEMPLO 34

Considere un circuito constituido por un conductor muy delgado que va de -∞ a +∞ en el eje y. Este conductor lleva una corriente I_0. Se pide calcular la fuerza sobre una espira cuadrada de lado 2a con corriente I_1 según se muestra en la Figura 134.

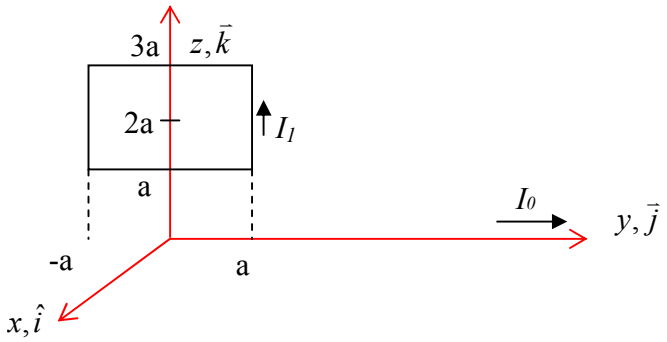


Figura 134.Circuito frente a corriente lineal.

Solución:

Primero calculamos el campo magnético producido por el conductor infinito en el plano y-z. Consideremos un punto P localizado en el eje z.

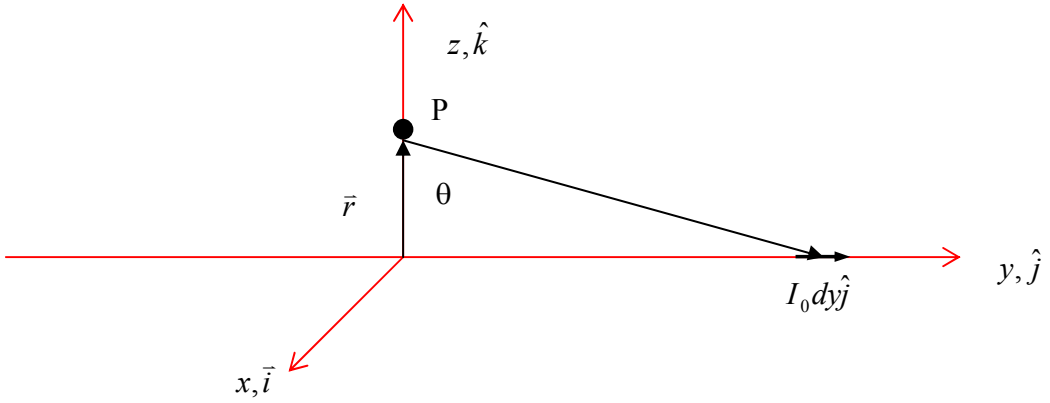


Figura 135.Campo de conductor infinito.

$$\vec{r} = z\hat{k}$$

$$\vec{r}\,' = y\hat{j}$$

$$I'd\vec{l} = I_0 dy\hat{j}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_0 dy\hat{j}}{\left[y^2+z^2\right]^{3/2}} \times \left(-y\hat{j}+z\hat{k}\right) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dy\hat{i}}{\left[y^2+z^2\right]^{3/2}}$$

haciendo el cambio de variable $y = z\,\mathrm{tg}\,\theta \Rightarrow dy = z(1+\mathrm{tg}^2\,\theta)d\theta$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{z^2\left(1+tg^2\theta\right)d\theta\hat{i}}{\left[z^2tg^2\theta+z^2\right]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi z}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\left[1+tg^2\theta\right]^{1/2}} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi z}2\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\left[1+tg^2\theta\right]^{1/2}}$$

$$1+\mathrm{tg}^2\,\theta = 1+\frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta+sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{\pi z}\hat{i}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi z}\cdot\sin\theta\Big|_0^{\pi/2}\hat{i}$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi z}\hat{i}$$

Ahora calculamos la fuerza $z,\hat{k}$

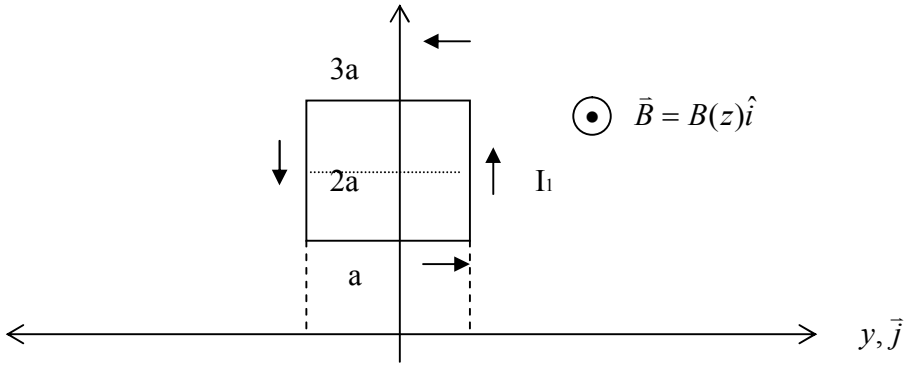


Figura 136. Fuerza sobre conductor rectangular.

Para las corrientes en el sentido $\hat{k}$ se tiene:

$$d\vec{F}_1 = I_1 dz\hat{k}\times B(z)\hat{i} = I_1 dzB(z)\hat{j}$$

Para las de sentido $-\hat{k}$ se tiene:

$$d\vec{F}_2 = I_1 dz\left(-\hat{k}\right)\times B(z)\hat{i} = -I_1 dzB(z)\hat{j}$$

$$\Rightarrow d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = 0$$

Para el segmento en z=a se tiene:

$$d\vec{F}_3 = I_1 dy\hat{j}\times B(a)\hat{i} = -I_1 B(a)dy\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_3 = -I_1 B(a)2a\hat{k} = -I_1\cdot\frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}2a\hat{k} = -\frac{I_1 I_0\mu_0}{\pi}\hat{k}$$

para el segmento en z=3a se tiene

$$d\vec{F}_4 = I_1 dy\left(-\hat{j}\right)\times B(3a)\hat{i} = I_1 B(3a)dy\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_4 = I_1\cdot\frac{\mu_0 I_0}{2\pi 3a}\cdot 2a\hat{k} = \frac{I_1 I_0\mu_0}{3\pi}\hat{k}$$

$$\therefore \text{ Fuerza neta} = \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \frac{I_1 I_0\mu_0}{\pi}\left(\frac{1}{3}-1\right)\hat{k} = -\frac{2I_1 I_0\mu_0}{3\pi}\hat{k}$$

EJEMPLO 35

En este ejemplo calcularemos la fuerza neta que experimenta un loop de corriente (o espira) en presencia de un campo magnético, y a partir de esto determinaremos el torque. El concepto del torque producido por un campo magnético es muy importante en la comprensión del comportamiento de las partículas cargadas orbitando (el modelo de la materia que veremos más adelante), motores y generadores eléctricos.

Consideremos un loop de corriente rectangular de largo *l* y ancho *w*, el cual esta expuesto a un campo magnético uniforme de módulo **B** tal como se ve en la Figura 137.

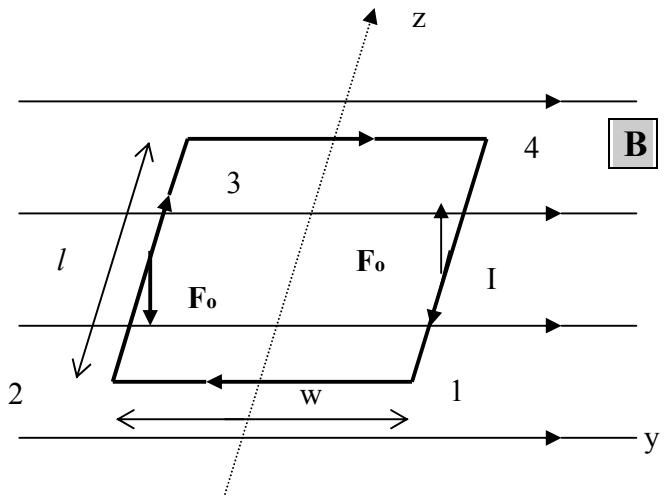


Figura 137. Torque magnético.

En esta figura se puede ver que $d\vec{l}$ es paralelo a $\vec{B}$ en los lados 1-2 y 3-4 del loop y ninguna fuerza es ejercida en esos lados. Sólo hay fuerza en los otros dos lados, entonces la fuerza neta sobre el circuito es

$$\vec{F} = I\int_2^3 d\vec{l}\times\vec{B} + I\int_4^1 d\vec{l}\times\vec{B}$$

$$\vec{F} = I\int_2^3 dz\hat{k}\times\vec{B} + I\int_1^4 dz(-\hat{k})\times\vec{B}$$

Es decir, la fuerza neta es cero, por lo tanto el circuito no experimenta movimiento de traslación neto (no se desplaza).

Sin embargo, las fuerzas de cada lado están aplicadas en lugares diferentes y, en consecuencia, producirán un torque neto sobre el circuito. Para examinar esta situación, consideremos el caso en que el plano del circuito forma un ángulo α con el campo magnético según se ilustra en la Figura 138.

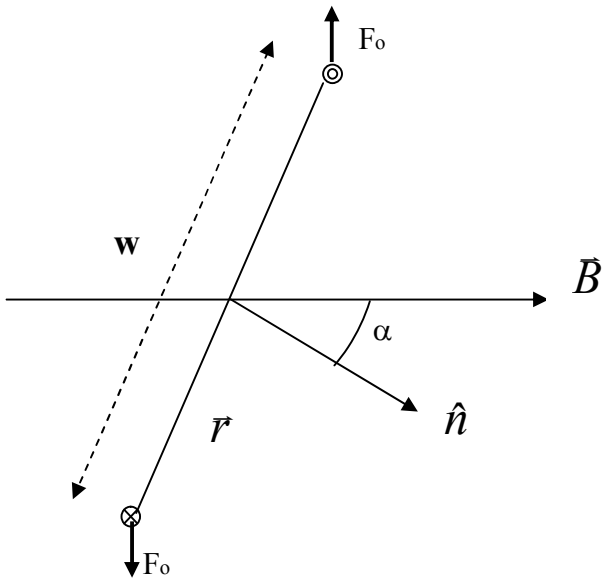


Figura 138. Fuerza y torque.

El elemento diferencial del *torque* (o el momento mecánico de fuerza) sobre un elemento de corriente $Id\vec{l}$ del circuito es

$$d\vec{T} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

y sus unidades son Newton-metros (N·m). Por lo tanto, el torque neto es

$$\oint_c d\vec{T} = \oint_c \vec{r} \times d\vec{F} = \oint_c \vec{r} \times id\vec{l} \times \vec{B}$$

donde c es la trayectoria del circuito. Es decir,

$$\vec{T} = I\int_2^3 \vec{r} \times dz\hat{k} \times \vec{B} + I\int_4^1 \vec{r} \times dz\hat{k} \times \vec{B}$$

y dado que el campo es constante

$$\vec{T} = \frac{IBwl}{2}\sin\alpha(-\hat{k}) + \frac{IBwl}{2}\sin\alpha(-\hat{k}) = -IBwl\,\sin\alpha\,\hat{k}$$

Así, cuando el plano del circuito es paralelo al campo magnético, éste experimenta el torque máximo. En la posición de equilibrio el vector normal a la superficie del circuito $\hat{n}$ es paralelo al campo magnético y no hay torque.

6.5 Ley Circuital de Ampere

Consideremos una región Ω del espacio en donde existe corriente fluyendo según se muestra en la Figura 139.

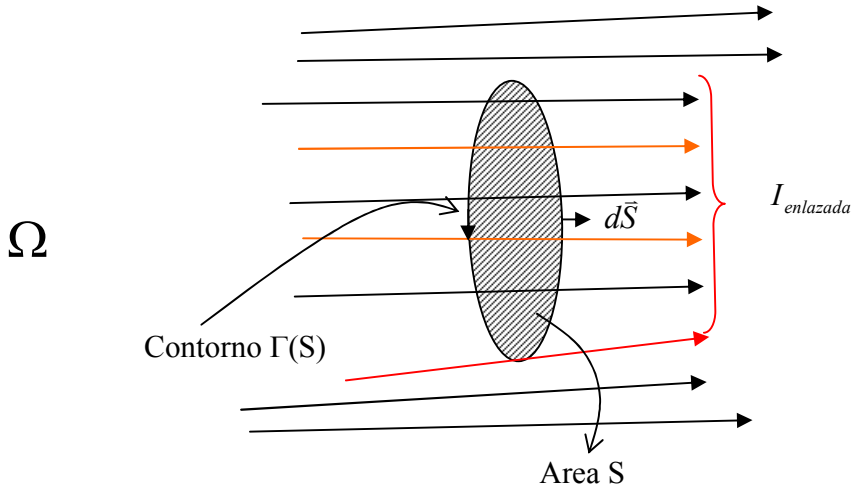


Figura 139. Ley circuital de Ampere.

Si tomamos una superficie cualquiera por la cual atraviesa una corriente total $I_{enlazada}$, entonces la Ley Circuital de Ampere establece lo siguiente:

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada} \qquad (6.17)$$

donde:

Γ(S) contorno de la superficie S recorrido en el sentido de la mano de derecha en torno del vector del elemento de superficie $d\vec{S}$, según se muestra en la Figura 139.
$I_{enlazada}$ corriente total que atraviesa la superficie S, la que es igual a la corriente enlazada por la trayectoria Γ(S).

Notar que cuando se conoce el vector densidad de corriente $\vec{J}$ como en la Figura 140, la corriente enlazada es $I_{total} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$.

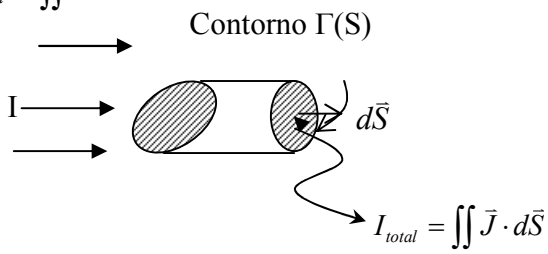


Figura 140. Corriente enlazada.

Es muy importante respetar el sentido del contorno de la superficie, esto es, mantener la regla de la mano derecha, cuando se aplica esta Ley.

Es usual definir la ley de Ampere en términos del vector intensidad de campo magnético $\vec{H}$ el cual se define de la expresión

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (6.17)$$

donde μ_0 es la permeabilidad del espacio vacío igual a $4\pi \times 10^{-7}[H/m]$ según vimos anteriormente. Con esta definición la ley circuital de Ampere se puede escribir como

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada} \quad (6.18)$$

EJEMPLO 36

Calcule el campo producido por una bobina infinita de N espiras (vueltas) por unidad de largo y que lleva una corriente *I*.

Solución:

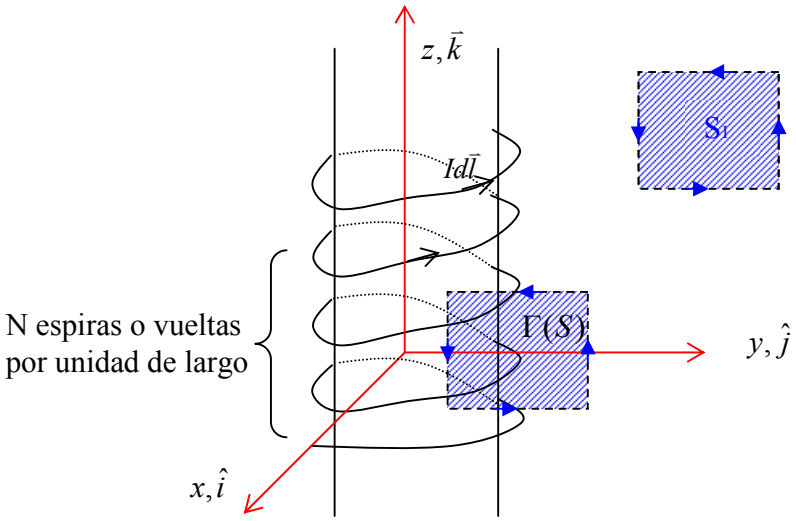


Figura 141. Campo bobina.

Por simetría los campos tendrán dirección según z. Llamemos a los campos en el interior $\vec{B}_i = B_i \hat{k}$ y en el exterior $\vec{B}_e = B_e \hat{k}$.

Por la geometría del problema, el campo afuera puede suponerse despreciable, ya que el campo de espiras contiguas se cancela.

Para la interior tomamos el contorno $\Gamma(S)$ de la superficie S cuya mitad esta dentro de la bobina y la otra esta afuera. Se cumple:

$$\oint_{\Gamma_1(s)} \vec{B}_i \cdot d\vec{l} = u_0 I_{total}$$

Pero tomando una trayectoria de largo *l* en el eje z se tiene $I_{total} = NIl$, ya que no hay corriente enlazada afuera de la bobina. Luego,

$$-B_i l = -\mu_0 NIl \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_i = \mu_0 NI\hat{k}$$

La corriente enlazada es negativa dado el sentido de la trayectoria utilizada en la figura 141. Así, en un solenoide (o bobina) ideal el campo al interior es constante y nulo en el exterior.

6.6 3ª Ecuación de Maxwell

Aplicando el teorema de Stokes a la integral de línea de la ley circuital de Ampere se tiene

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S} \left(\nabla \times \vec{H}\right) \cdot d\vec{S} \quad (6.19)$$

Además, en términos del vector densidad de corriente la corriente total enlazada por el contorno $\Gamma(S)$ es

$$I_{enlazada} = \iint_{S} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (6.20)$$

Esquemáticamente esto se muestra en la Figura 142.

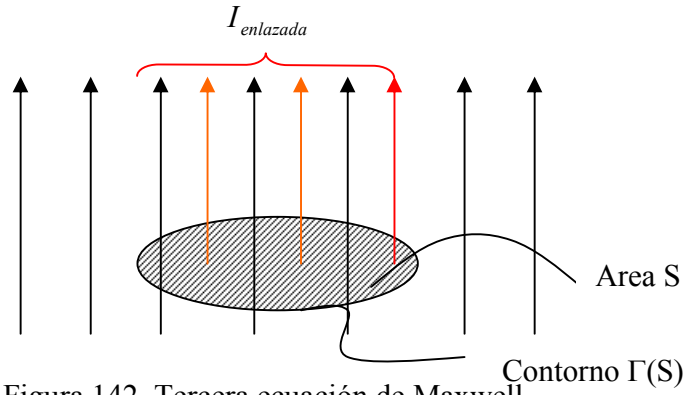


Figura 142. Tercera ecuación de Maxwell.

Reemplazando valores obtenemos

$$\Rightarrow \iint_{S} \left(\nabla \times \vec{H}\right) d\vec{S} = \iint_{S} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (6.21)$$

y esta ecuación se cumple para cualquier superficie S, luego

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (6.22)$$ esta es la 3ª ecuación de Maxwell

Dado que $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ esta ecuación también se puede escribir como

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (6.23)$$

En termino físicos decimos que las líneas de campo magnético rotan alrededor de $\vec{J}$. O que las líneas de campo magnético $\vec{B}$ "aparecen" alrededor de una corriente dada.

Más tarde agregaremos otro término a esta ecuación cuando veamos campos variables en el tiempo.

6.7 4ta Ecuación de Maxwell

Otro resultado experimental es que a diferencia del caso de los campos eléctricos que nacen y terminan en cargas eléctricas, en el caso del campo magnético no existen fuentes de donde nazcan líneas de campo, es decir, no existen cargas magnéticas. Esto se traduce en que toda línea de campo magnético es cerrada. Matemáticamente esto se expresa de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.24)$$ esta es la 4ª ecuación de Maxwell

Si integramos esta ecuación en un volumen cualquiera tenemos

$$\iiint_{\Omega} \nabla \bullet \vec{B} dv = 0 \quad \Rightarrow \quad \oiint_{S(\Omega)} \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0$$

En otras palabras, el flujo neto del campo magnético en cualquier superficie cerrada es nulo. Esto se muestra en la Figura 143.

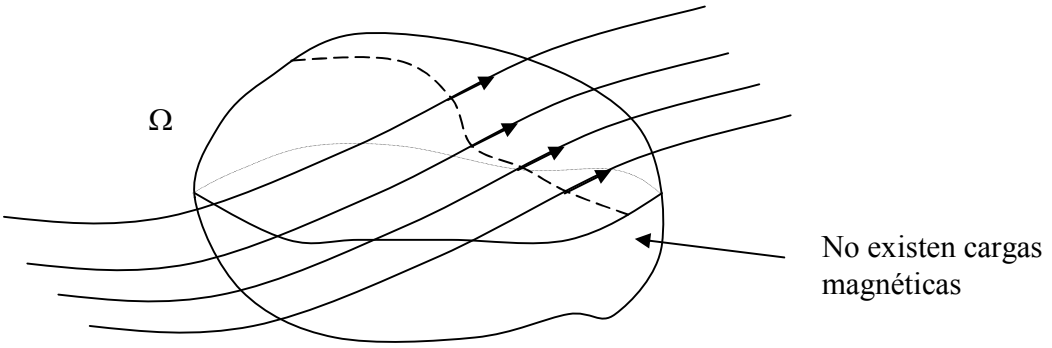


Figura 143. Inexistencia de cargas magnéticas.

En la Figura 143 entran a la superficie un número igual de líneas de campo que salen de dicha superficie.

6.8 Movimiento de una carga puntual en el interior de un campo magnético

Una característica importante de la fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada móvil es que la fuerza es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula. En efecto, la expresión de la Fuerza de Lorentz es

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B} \quad (6.26)$$

La fuerza magnética por consiguiente no realiza trabajo sobre la partícula y la energía cinética no se ve afectada por esta fuerza. Así, la fuerza magnética solo modifica la dirección de la velocidad pero no su módulo.

En el caso especial en que la velocidad de una partícula sea perpendicular a un campo magnético uniforme, como se ve en la Figura 144, la partícula se mueve describiendo una órbita circular.

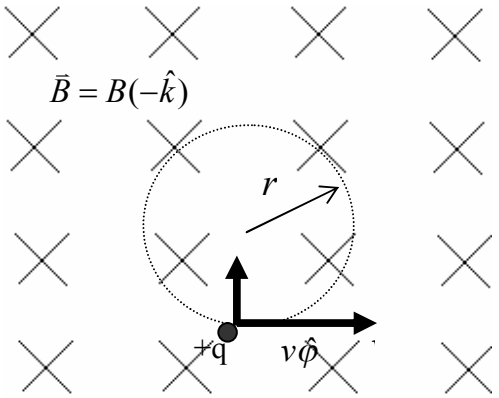


Figura 144.Movimiento de cargas en un campo magnético.

La fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular. Podemos relacionar el radio de la circunferencia con el campo magnético y la velocidad de la partícula haciendo que la fuerza resultante sea igual a la masa *m* multiplicada por la aceleración centrípeta $v^2/r\,\hat{\rho}$. La fuerza resultante en este caso es $qvB\ \hat{\rho}$ puesto que ***v*** y **B** son perpendiculares. Así pues la segunda ley de Newton nos da

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \quad (6.27)$$

o sea

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (6.28)$$

Por lo tanto, la partícula cargada se mueve en un plano perpendicular al campo magnético uniforme que esta dirigido hacia el plano de papel (indicado por las cruces). La fuerza magnética es perpendicular a la velocidad de la partícula haciendo que se mueva en una circunferencia de radio r que satisface la ecuación anterior.

La frecuencia angular del movimiento circular es

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad (6.29)$$

y su periodo vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (6.30)$$

Es importante notar que la frecuencia no depende del radio de la órbita ni de la velocidad de la partícula. Esta frecuencia se denomina *frecuencia ciclotrón.*

La componente de la velocidad paralela a B no se ve influida por el campo magnético. Consideremos por ejemplo un campo magnético uniforme en la dirección z y sea v_z la

componente de la velocidad de la partícula paralela al campo. En un sistema de referencia que se mueve en la dirección z con velocidad v_z, la partícula tiene su velocidad perpendicular al campo y se mueve en una circunferencia contenida en el plano *xy*. En el sistema de referencia original la trayectoria de la partícula es una hélice que se enrolla alrededor de las líneas de B, como se muestra en la Figura 145.

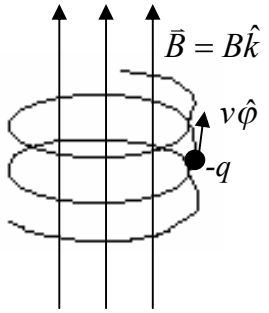


Figura 145. Trayectoria helicoidal.

Cuando una partícula cargada tiene una pequeña componente de velocidad paralela al campo magnético B, se mueve con una trayectoria helicoidal.

Selector de Velocidades

La fuerza magnética sobre una partícula cargada que se mueve en el interior de un campo magnético uniforme puede equilibrarse por una fuerza electrostática. Dado que la fuerza eléctrica tiene la dirección del campo eléctrico (en el caso de partículas positivas) y la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético, los campos eléctrico y magnético deben ser perpendiculares entre sí, según se muestra en el arreglo de la Figura 146. En esa configuración se tiene una región del espacio entre las placas de un condensador, en el cual existe un campo eléctrico y un campo magnético perpendiculares entre si.

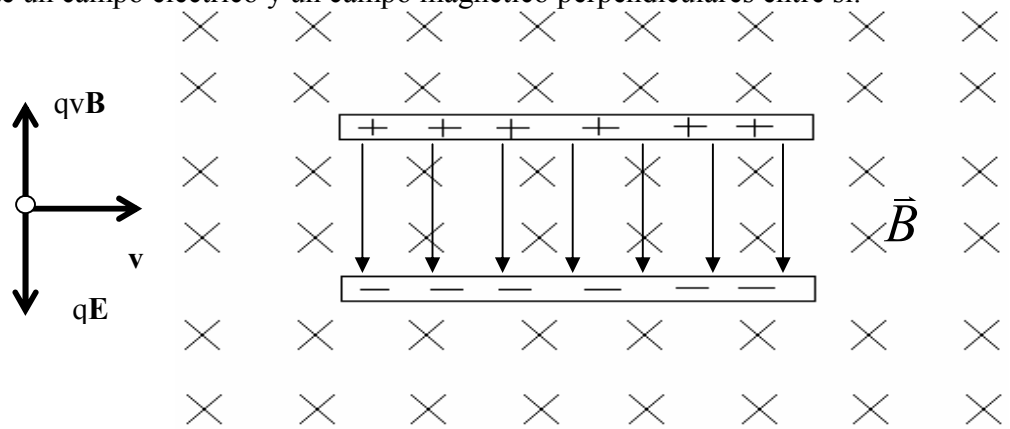


Figura 146. Selector de velocidades.

Cuando una partícula positiva se mueve hacia la derecha experimenta una fuerza eléctrica dirigida hacia abajo $q\boldsymbol{E}$ y otra fuerza magnética dirigida hacia arriba $q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}$, que se equilibran si $vB=E$, Si la carga es negativa, estarán invertidas ambas fuerzas. Luego, para que las cargas pasen sin ser interceptadas la velocidad cumple con la condición v=E/B,

independiente de la masa y la carga de la partícula. Es decir, las cargas que pasan se seleccionan en base a su velocidad exclusivamente.

El Espectrógrafo de Masas.

El espectrógrafo de masas, fabricado en primer lugar por Aston en 1919, fue diseñado para medir las masas de los isótopos. Mide la razón masa a carga de los iones (cargas positivas), determinando la velocidad de éstos y luego midiendo el radio de su órbita circular en el interior de un campo magnético uniforme. El cuociente masa a carga viene dado por

$$\frac{m}{q} = \frac{Br}{v} \quad (6.31)$$

en donde B es campo magnético, r el radio de la órbita circular y v la velocidad de la partícula. Un dibujo esquemático de un espectrógrafo de masas se muestra en la Figura 147.

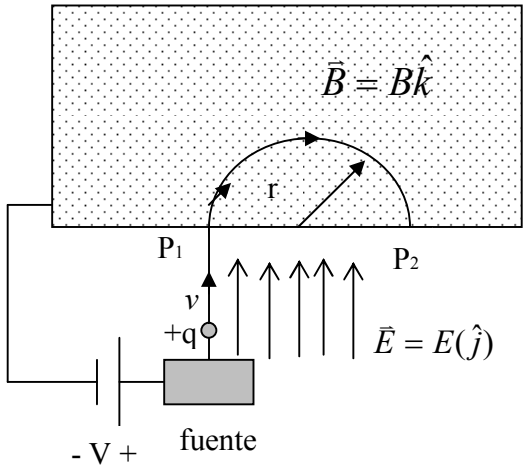


Figura 147. Espectrógrafo de masas.

En la Figura 147, se ven iones procedentes de la fuente, que son acelerados por un campo eléctrico y entran en un espacio que contiene un campo magnético uniforme (aquí el campo eléctrico es nulo). Si los iones parten del reposo y se mueven a través de una diferencia de potencial V, su energía cinética cuando entren en P1 es igual a la pérdida de energía potencial qV.

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \quad (6.32)$$

Los iones se mueven en una circunferencia de radio r e inciden sobre una película fotográfica en el punto P2, a una distancia 2r del punto en el que entraron en el electroimán. La velocidad v puede eliminarse de las ecuaciones para hallar q/m en función de las magnitudes conocidas V, B y r. El resultado es

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2r^2}{2V} \quad (6.33)$$

6.9 Potencial Magnético Vectorial

Similarmente a lo ocurrido en electrostática cuando definíamos un potencial desde el cual se obtenía el campo, para simplificar los cálculos de campos magnéticos se recurre al concepto de potencial magnético vectorial.

Dado que sabemos que la divergencia de $\vec{B}$ es nula (cuarta ecuación de Maxwell) aprovecharemos la identidad matemática

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A} \right) = 0 \quad (6.34)$$

para asumir que el campo magnético $\vec{B}$ puede expresarse como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (6.35)$$

donde $\vec{A}$ se denomina potencial magnético vectorial y es en general más fácil de calcular que el campo magnético directamente.

Teníamos que por definición $\vec{B}$ se representa por

- $\vec{B} = \oint \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|^3}$ (6.36) para circuitos,
- $\vec{B} = \iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|^3}$ (6.37) para densidades en volumen, y
- $\vec{B} = \iint_S \frac{\mu_0 \vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') dS}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|^3}$ (6.38) para densidades superficiales de corriente

  $[\vec{K}] = [I/l]$.

Se puede demostrar que

$$\nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|} \right) = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|^3} \quad (6.39)$$ $\nabla_{\vec{r}}$ opera sobre $\vec{r}$

con ello, si tomamos por ejemplo la expresión del campo magnético para circuitos lineales, se tiene:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\Gamma i d\vec{l}' \times \left(\nabla \left(\frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|} \right) \right) \quad (6.40)$$

aplicando la identidad

$$\nabla \times \left(f\vec{F} \right) = f \nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F} \quad (6.41)$$

donde f es un campo escalar y $\vec{F}$ un campo vectorial

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\frac{Id\vec{l}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right) = \frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \nabla \times Id\vec{l}\,' + \nabla \left(\frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right) \times Id\vec{l}\,' \quad (6.42)$$

∇ opera sobre $\vec{r} \Rightarrow \nabla \times Id\vec{l}\,' = 0$

y como

$$Id\vec{l}\,' \times \nabla \left(\frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right) \times Id\vec{l}\,' \quad (6.43)$$

$$\Rightarrow Id\vec{l}\,' \times \left[\nabla \left(\frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right) \right] = -\nabla \times \left(\frac{Id\vec{l}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right) \quad (6.44)$$

luego

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \nabla \times \left(\frac{Id\vec{l}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right) \quad (6.45)$$

y como ∇ opera sobre $\vec{r}$ y $\int$ sobre $\vec{r}\,'$ podemos escribir finalmente:

$$\vec{B} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \right] \quad (6.46)$$

de donde se deduce que

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \quad (6.47)$$ para circuitos.

Similarmente para distribuciones de corriente se obtiene

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K} dS'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \quad (6.48)$$ para distribuciones superficiales de corriente

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\Omega \frac{\vec{J} dV'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} \quad (6.49)$$ para distribuciones en volumen

Notar que una vez que se dispone del vector $\vec{A}$, el campo magnético se obtiene fácilmente derivando (en realidad se debe calcular el rotor como se definió originalmente), cuestión que en general es más fácil de realizar que el cálculo directo.

Usando la identidad

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A} \right) = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} \right) - \nabla^2 \vec{A} \quad (6.50)$$

Se puede demostrar que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ para campos magnéticos que no varían en el tiempo.
Luego

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A} \right) = -\nabla^2 \vec{A} \quad (6.51)$$

Pero habíamos demostrado que por la 3ra Ecuación de Maxwell se cumple

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (6.52)$$

Por lo tanto, el potencial magnético vectorial cumple con

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \qquad (6.53) \text{ Ecuación de Poisson vectorial.}$$

En coordenadas cartesianas $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, la ecuación de Poisson corresponde a

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$
$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$
$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

con

$$\nabla^2 A_i = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2} \quad (6.54)$$

Se requieren condiciones de borde para resolver esta ecuación, en conjunto con metodologías numéricas de resolución de ecuaciones diferenciales parciales.

EJEMPLO 37

Si por el plano x-y circula una densidad superficial de corriente $\vec{K} = k\,\hat{j}$, se pide obtener el campo magnético en todo el espacio.

Sol^{n}:

De la definición de $\vec{A}$ tenemos:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{K} ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \qquad \text{ds' = dx′dy′}$$

Por simplicidad calcularemos $\vec{A}$ en un punto del eje z, según se muestra en la Figura 148.

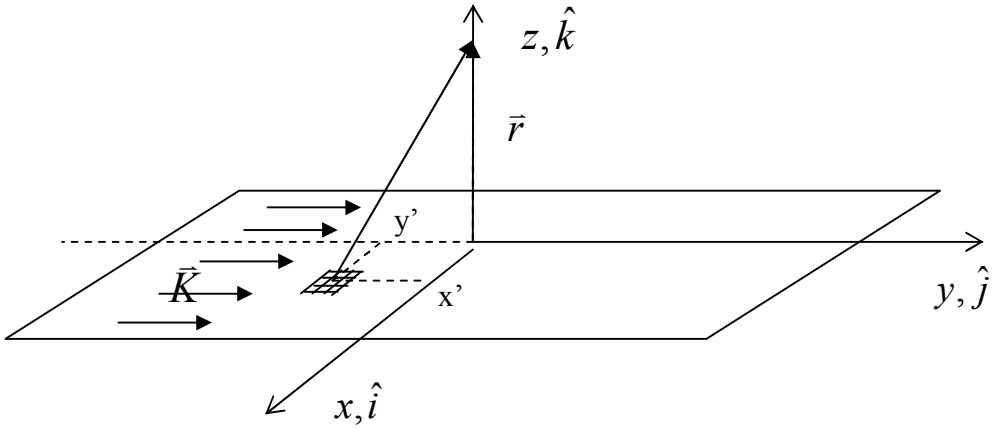


Figura 148. Potencial magnético vector.

Tenemos

$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= z\hat{k} \\ \vec{r}' &= x'\hat{i} + y'\hat{j} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}' = -x'\hat{i} - y'\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\Rightarrow \left\|\vec{r} - \vec{r}'\right\| = \left[x'^2 + y'^2 + z^2\right]^{1/2}$$

Luego

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{K\,\hat{j}dx'dy'}{\left[x'^2 + y'^2 + z^2\right]^{1/2}} \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 K}{4\pi}\hat{j}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx'dy'}{\left[x'^2 + y'^2 + z^2\right]^{1/2}}$$

$$y' = \left[x'^2 + z^2\right]^{1/2}\tan\theta \Rightarrow dy' = \left[x'^2 + z^2\right]^{1/2}\left[1 + \tan^2\theta\right]d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 K}{4\pi}\hat{j}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{dx'\left[1 + \tan^2\theta\right]\left[x'^2 + z^2\right]^{1/2}d\theta}{\left(x'^2 + z^2\right)^{1/2}\left(1 + \tan^2\theta\right)^{1/2}}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 K}{4\pi}\hat{j}\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_{\theta_1}^{\theta_2}(1 + \tan^2\theta)^{1/2}\,d\theta$$

$$\frac{1}{1 + \tan^2\theta} = \cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 K}{4\pi}\hat{j}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\theta_1}^{\theta^2}dx'\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

pero $sin\theta = \dfrac{y'}{\left[y'^2 + z^2 + x'^2\right]^{1/2}}$, y de la figura:

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &\to -\frac{\pi}{2} \\ \theta_2 &\to \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{A} = \frac{2\mu_0 K}{4\pi}\hat{j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx'}{\left(x'^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

6.10 Dipolo Magnético

Para abordar el tema de los campos magnéticos en la materia se hace necesario, al igual que vimos anteriormente para dieléctricos, un modelo elemental para aplicarlo a un medio material. Este concepto para el caso de campos magnéticos es el dipolo magnético.

Consideremos un circuito circular de corriente como en la Figura 149.

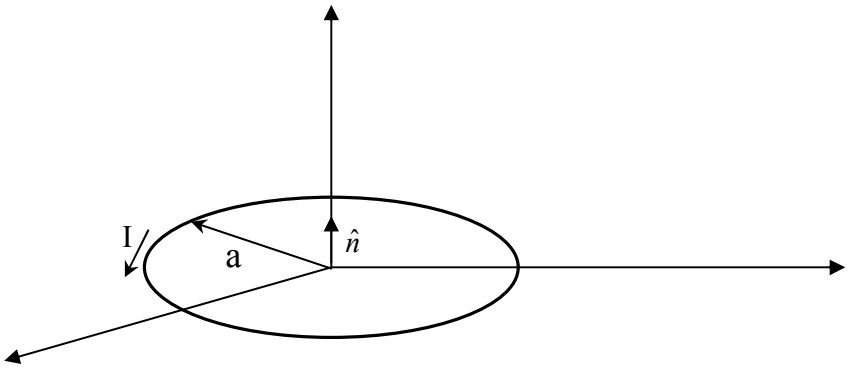


Figura 149. Dipolo Magnético.

El área del circuito es $A=\pi a^2$ y conduce una corriente I. Si llamamos $\hat{n}$ al vector normal a la superficie, definimos el dipolo magnético $\vec{m}$ como el vector

$$\vec{m} = AI\hat{n} \quad (6.55)$$

Así, el dipolo magnético (también llamado momento dipolar magnético) es proporcional al área definida por el circuito y proporcional también a la corriente que circula por él.

Determinemos ahora el campo magnético $\vec{B}$ en un punto de observación P(r,θ,ϕ) producido por el circuito circular (o *loop*) de la figura 150. Para ello primero obtendremos el vector potencial magnético, y consideraremos el sistema de coordenadas de la Figura 141.

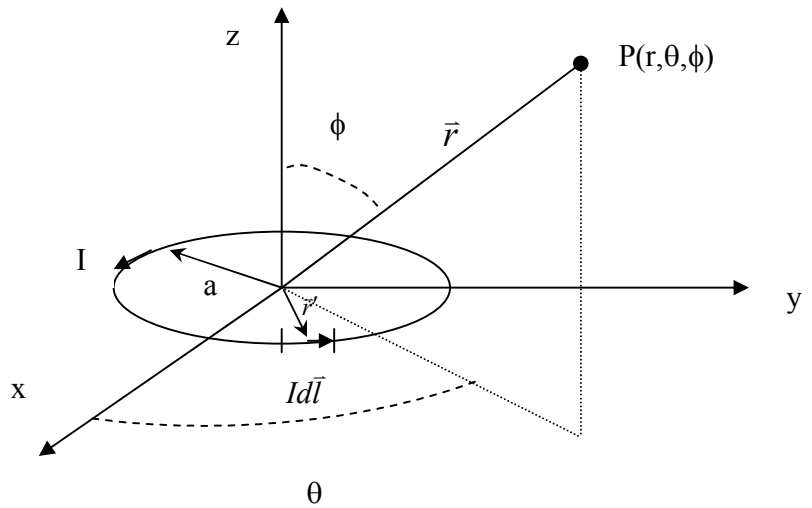


Figura 150. Campo magnético de un dipolo magnético.

En estas condiciones, el potencial en el punto P tiene la forma $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{Id\vec{l}}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$

Para r>>a, es decir, para lugares lejanos del punto de observación, se cumple

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3} + TOS$$

Además,

$$id\vec{l}' = Iad\theta' \hat{\theta} = Iad\theta'(-\sin\theta' \hat{i} + \cos\theta' \hat{j})$$

Luego, despreciando los términos de orden superior (TOS) la expresión del vector potencial magnético es

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3} \right) Iad\theta'(-\sin\theta' \hat{i} + \cos\theta' \hat{j})$$

considerando que $\vec{r} \bullet \vec{r}' = ra\sin\varphi\cos\theta\cos\theta' + ra\sin\varphi\sin\theta\sin\theta'$ y desarrollando la integral se llega a que el vector potencial magnético $\vec{A}$ sólo tiene la componente $\hat{\theta}$ y está dada por

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I\pi a^2 \sin\phi\hat{\theta}}{4\pi r^2} \quad (6.56)$$

lo que también puede escribirse como:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \quad (6.57)$$

donde $\vec{m} = I\pi a^2 \hat{k}$ es el dipolo magnético del loop (notar que $\hat{k} \times \hat{r} = \sin\phi\hat{\theta}$).

Finamente el campo magnético se obtiene a partir de $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left(2\cos\phi\hat{r} + \sin\phi\hat{\phi} \right) \quad (6.58)$$

Es interesante comparar esta ecuación con expresiones similares de electrostática para el potencial eléctrico V y la intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$ producidas por el dipolo eléctrico. Esta comparación está hecha en la siguiente tabla, en la que notamos las similitudes entre el campo $\vec{B}$ lejano producido por un pequeño loop de corriente y $\vec{E}$ lejano producido por un dipolo eléctrico. Es entonces razonable interpretar un pequeño loop de corriente como un dipolo magnético.

Se puede demostrar que el torque sobre un dipolo magnético está dado por la expresión

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (6.66)$$

Esta expresión es generalmente aplicable en la determinación del torque sobre un dipolo y su única limitación es que el campo magnético debe ser uniforme. Cabe hacer notar que el torque está en la dirección del eje de rotación y en la posición de equilibrio $\vec{m}$ y $\vec{B}$ son paralelos.

Las líneas de B sobre el dipolo magnético son similares a las líneas de E sobre un dipolo eléctrico. La figura 151 (d) ilustra las líneas de B alrededor del dipolo magnético *m=IS.*

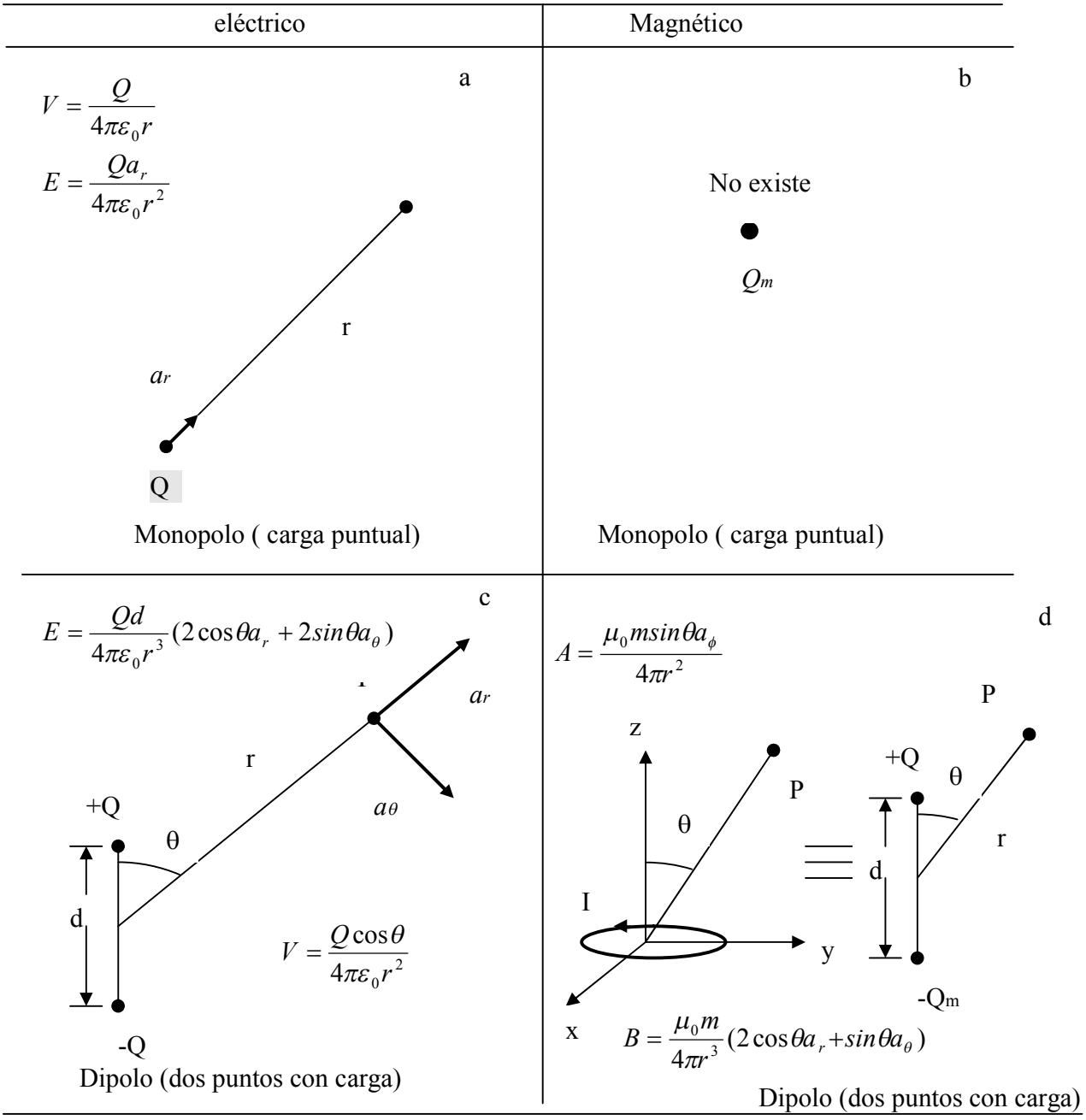


Figura 151. Comparación electroestática v/s magnetostática.

6.12 Modelo Atómico de Materiales

Similarmente al análisis de dieléctricos supondremos aquí un modelo microscópico de la materia. En este caso supondremos que cada átomo se compone de un núcleo con carga positiva en reposo y un conjunto de electrones rotando en torno de ese núcleo con velocidad *u,* según se muestra en la Figura 152. Así, los electrones de este átomo pueden modelarse como un circuito con corriente $I = \frac{dq}{dt} = \frac{qu}{2\pi R}$.

Donde q es la carga total de los electrones [C] y R el radio promedio de las trayectorias circulares. Esquemáticamente:

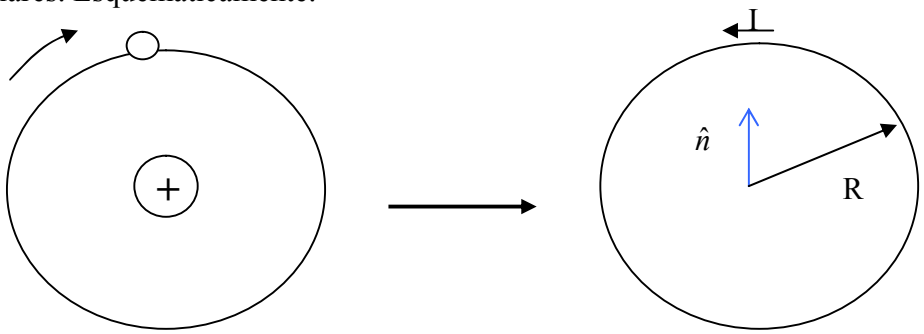


Figura 152. Modelo Atómico de Corrientes.

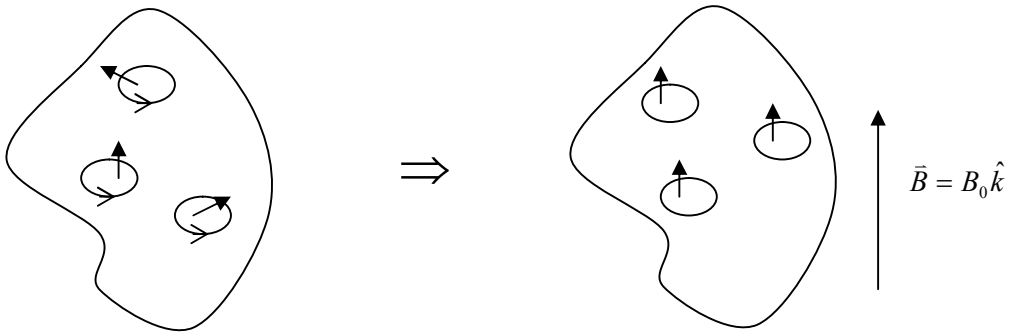
Así, es posible representar el átomo mediante el dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S\hat{n}[Am^2] \quad (6.67)$$

Para describir el fenómeno a escala macroscópica se define el vector magnetización $\vec{M}$ como el momento dipolar magnético por unidad de volumen:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{m} \vec{m}_k}{\Delta V}[A/m] \quad (6.68)$$

Un medio en el cual $\vec{M} \neq 0$ se dice un medio magnetizado. Notar que en presencia de un campo magnético externo los dipolos magnéticos tenderán a alinearse con él debido al torque $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$, según vimos en la sección anterior.



Sin campo $\vec{B}$ Con $\vec{B} = B_0\hat{k}$ externo

Figura 153. Modelo Atómico de Corrientes.

Notar que debido a lo pequeña de las corrientes se desprecia el efecto entre ellas y solo se asume que los dipolos responden al campo externo.

6.13 Corrientes de Magnetización

Consideremos un elemento diferencial de volumen de un medio material con magnetización, como en la Figura 154. Luego el momento dipolar asociado al volumen *dV'* es $d\vec{m}$, donde:

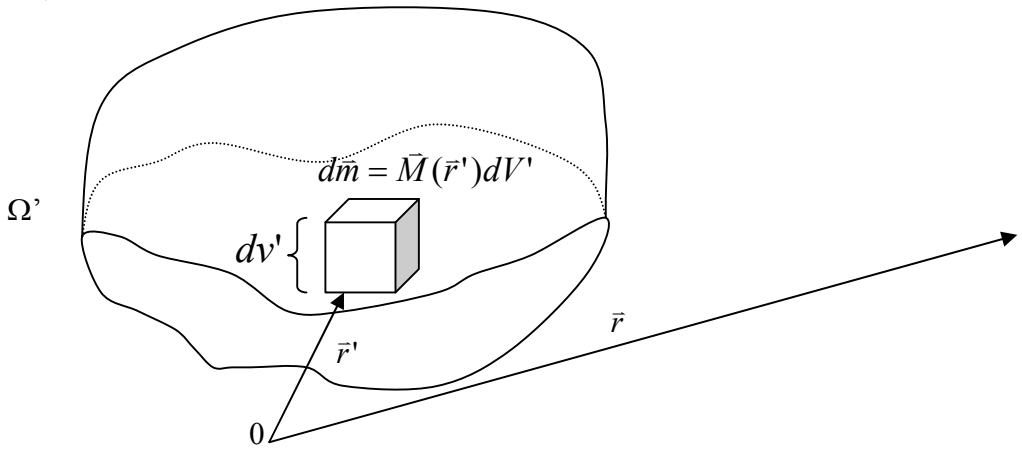


Figura 154. Modelo de la Materia.

El potencial magnético $d\vec{A}$ asociado al dipolo magnético en la posición $\vec{r}$ es:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{m} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (6.69)$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}, \quad (6.70)$$

pero $\nabla_{\vec{r}'}\left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega'} \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla'\left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\right) dV' \quad (6.71)$

y usando la identidad $\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + (\nabla f) \times \vec{F}$ podemos escribir

$$\nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\right) = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \times M(\vec{r}') + \nabla'\left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\right) \times \vec{M}(\vec{r}') \quad (6.72)$$

$$\Rightarrow \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla'\left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\right) = -\nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\right) + \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \quad (6.73)$$

Luego

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega'} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega'} \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\right) dV' \quad (6.74)$$

Aplicando el teorema $\iiint_V \nabla \times \vec{F} dV = -\oiint_{S(V)} \vec{F} \times d\vec{S}$ a la segunda integral

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega'}\frac{\nabla'\times\vec{M}(\vec{r}')dV'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_{S(\Omega')}\frac{\vec{M}(\vec{r}')\times dS'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \quad (6.75)$$

Esta expresión tiene la forma:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega'}\frac{\vec{J}_M dV'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_{S(\Omega')}\frac{\vec{K}_M dS'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \quad (6.76)$$

con $\vec{J}_M = \nabla'\times\vec{M}(\vec{r}')$ (6.77) densidad de corriente de magnetización en volumen

$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}')\times\vec{n}$ (6.78) densidad de corriente superficial de magnetización (que rodea al material)

Así, el efecto de la magnetización puede reemplazarse por las dos densidades de corriente $\vec{J}_M$ y $\vec{K}_M$ que aparecen en el material.

6.14 Permeabilidad Magnética

Recordemos que

$$\nabla\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \vec{J} \quad (6.79)$$

En el espacio vacío, donde $\vec{J}$ es la densidad de corriente en volumen.

Ahora en general al interior de un medio material habrá tanto corrientes libres $\vec{J}_L$ como de magnetización. Así :

$$J = J_M + J_L \quad (6.80)$$

entonces

$$\nabla\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \vec{J}_L + \vec{J}_M \quad (6.81)$$

designaremos $\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_L$ y $\nabla\times\vec{M} = \vec{J}_M$

$$\Rightarrow \nabla\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \nabla\times\vec{H} + \nabla\times\vec{M} \quad (6.82)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right), \quad (6.83)$$

si anotamos $\vec{M} = \chi_m\vec{H}$ (6.84) $\Rightarrow \vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H}$ (6.85)

ó

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (6.86)$$

Con $\mu = \mu_R\mu_0$ (6.87) es la permeabilidad del material y $\mu_R = (1+\chi_m)$ (6.88) es la permeabilidad relativa. Análogamente al caso de los dieléctricos, en los medios magnetizados se tiene:

- $\vec{B} = [\mu]\vec{H}$ y $\vec{B}$ no es paralelo a $\vec{H}$ $\Rightarrow$ no lineal anisótropo
- $\vec{B} = [\mu(\vec{r})]\vec{H}$, pero $\vec{B} \parallel \vec{H} \Rightarrow$ no lineal isótropo
- $\|\vec{B}\| = \mu(\vec{r})\|\vec{H}\| \Rightarrow$ lineal-isótropo
- $\vec{B} = \mu\vec{H}$, μ=cte. $\Rightarrow$ homogéneo

6.15 Clasificación de los Materiales Magnéticos

Es común realizar la siguiente clasificación de los materiales magnéticos dependiendo del valor μr.

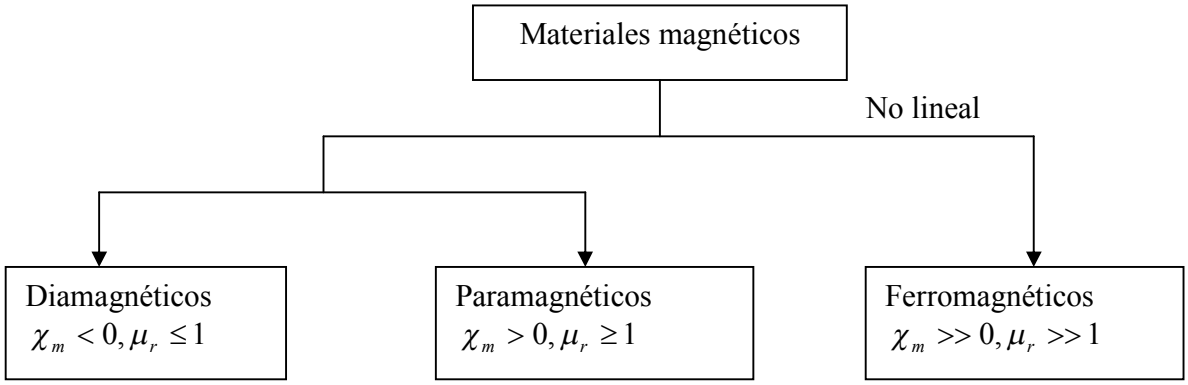


Figura 155. Clasificación Materiales Magnéticos.

Los más importantes son los ferromagnéticos y en general, χ_m es altamente dependiente de la temperatura (alta t° $\Rightarrow$ disminuye χ_m).

La relación específica entre $\vec{B}$ y $\vec{H}$ depende de la T° y de la historia, por ello bajo diferentes condiciones μ_r puede variar de 50 a 600. En el capítulo 7 veremos aplicaciones específicas de estos materiales.

De la ley de Amperé

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}. \quad (6.89)$$

Luego se puede montar un experimento en que variamos $\vec{H}$ y medimos $\vec{B}$ (en el capítulo 7 veremos relaciones entre el campo magnético y el voltaje, que se usan para medir B). La curva resultante es la curva de histéresis[1] de la Figura 156.

[1] Significa retraso en griego

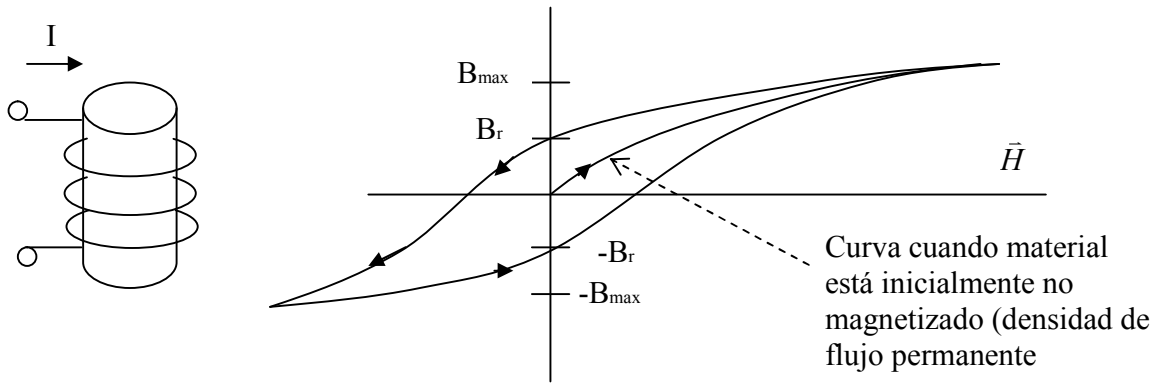


Figura 156. Ciclo de Histéresis.

En la Figura 156 B_r es el valor residual del campo aunque no haya corriente y Bmax: es el valor de saturación del campo
Valores típicos de la permeabilidad para diferentes materiales se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 4. Permeabilidad Relativa de Algunos Materiales*

Material	μ_r
Diamagnéticos	
Bismuto	0.999833
Mercurio	0.999968
Plata	0.9999736
Plomo	0.9999831
Cobre	0.9999906
Agua	0.9999912
Hidrógeno (s.t.p.)	≈1.0
Paramagnéticos	
Oxígeno (s.t.p.)	0.999998
Aire	1.00000037
Aluminio	1.000021
Tungsteno	1.00008
Platino	1.0003
Manganeso	1.001
Ferromagnéticos	
Cobalto	250
Níquel	600
Hierro Suave	5000
Hierro-Silicio	7000

*Estos valores son típicos y pueden variar con respecto a otras publicaciones debido a que existen muchas variedades de los distintos materiales.

Propuesto. Considere un material ferromagnético de 2 cms de ancho con permeabilidad relativa de μr=2.5.
Se ha medido el campo al interior del medio material igual a $\vec{B} = y\hat{i} - x\hat{j}$. Se pide determinar a) $\vec{J}$, b) $\vec{J}_M$, c) $\vec{M}$, d) $\vec{K}_M$.

6.16 Condiciones de borde

Consideremos dos medios magnéticos de permeabilidades μ_1 y μ_2 según se muestra en la Figura 157. Para considerar la situación más general, consideraremos que en el plano de interfaz entre los medios existe una corriente superficial (que se interna en la hoja).

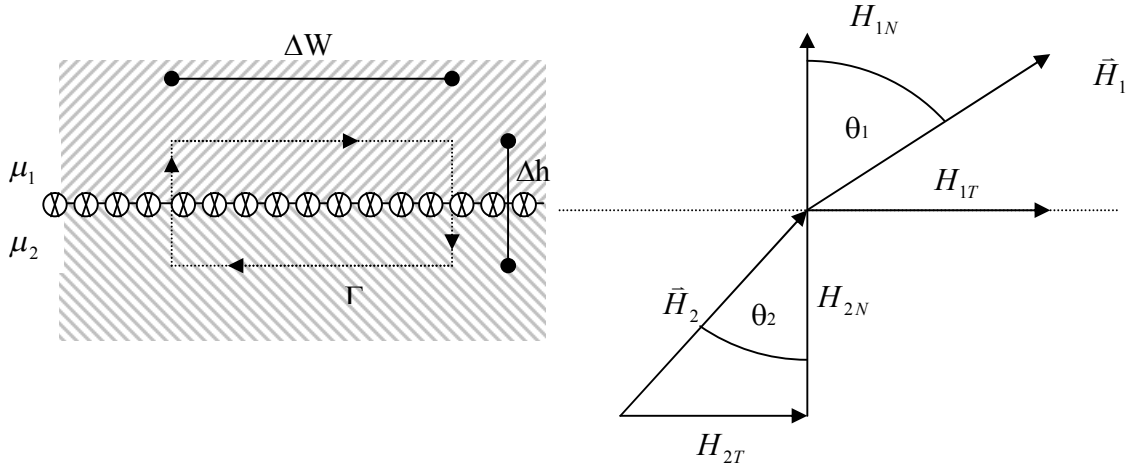


Figura 157. Condiciones de Borde.

De las ecuaciones de Maxwell sabemos que

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \qquad B_{1N} = B_{2N} \Leftrightarrow \mu_1 H_{1N} = \mu_2 H_{2N} \quad (6.90)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_E \quad (6.91)$$

$$I_E = H_{1T}\Delta w - H_{1N}\frac{\Delta h}{2} - H_{2N}\frac{\Delta h}{2} - H_{2T}\Delta w + H_{2N}\frac{\Delta h}{2} + H_{1N}\frac{\Delta h}{2}$$

y para Δh→0 $\qquad H_{1T} - H_{2T} = \dfrac{I_E}{\Delta w}$, definiendo $K = \lim_{\Delta w \to 0}\left\{\dfrac{I_E}{\Delta w}\right\}$ (6.92) como la densidad de corriente superficial se obtiene:

$$H_{1T} - H_{2T} = K \Rightarrow \qquad \frac{B_{1T}}{\mu_1} - \frac{B_{2T}}{\mu_2} = K \quad (6.93)$$

Usando estas condiciones de borde se puede demostrar que

$$\frac{tan\theta_1}{tan\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (6.94)$$

EJEMPLO 38

El plano x-y sirve de interfaz entre dos medios. El medio 1 (z<0) se llena con un material de permitividad μ_r=6 , y el medio 2 (z>0) se llena con un material con μ_r=4. Si en la interfaz hay una corriente superficial de $\frac{0.001}{\mu_0}\hat{j}[A/m]$ y $\vec{B}_2 = 5\hat{i} + 8\hat{k}\ \ m\frac{Wb}{m^2}$. Encuentre $\vec{H}_1$ y $\vec{B}_1$.

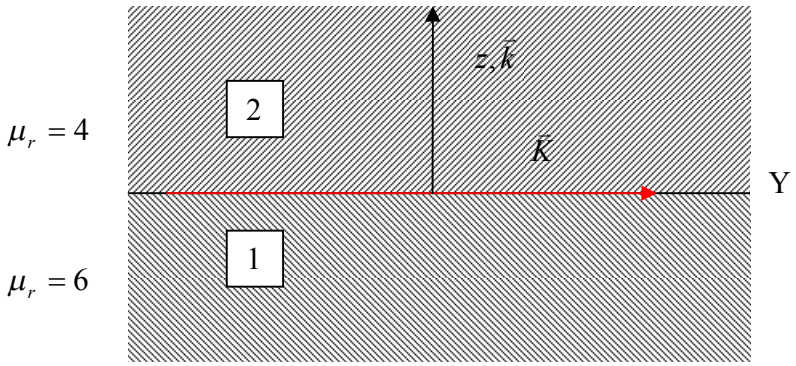


Figura 158. Aplicación condiciones de borde.

Solución:

Imponiendo condiciones de borde para la componente normal del campo magnético tenemos

$$B_{1N} = B_{2N} \Rightarrow B_{1N} = 8\hat{k} \Rightarrow B_{1Z} = 8$$

además

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_2} \Rightarrow \vec{H}_2 = \frac{1}{4\mu_0}\left(5\hat{i} + 8\hat{k}\right)\left[\frac{mA}{m}\right]$$

Aplicando ahora la condición para H tenemos

$$H_{1T} - H_{2T} = K$$

$$H_{2T} = \frac{5\hat{i}}{4\mu_0}\times 10^{-3}\left[\frac{A}{m}\right] \Rightarrow H_{1T} = \frac{5\times 10^{-3}}{4\mu_0} + \frac{10^{-3}}{\mu_0} = \frac{9}{4\mu_0}\times 10^{-3}\left[\frac{A}{m}\right]$$

Como $\vec{B}_1 = \mu_1\vec{H}_1 \Rightarrow \vec{B}_1 = 6\mu_0\vec{H}_1$

Por lo tanto, igualando componentes: $\vec{B}_1 = \frac{9\cdot 6}{4}\hat{i} + 8\hat{k}\ \ m\frac{Wb}{m^2}$ y $\vec{H}_1 = \frac{9}{4\mu_o}\hat{i} + \frac{8}{6\mu_o}\hat{k}\ \ \frac{mA}{m}$

6.17 Resumen

En resumen, para campos que no dependen del tiempo se cumplen las siguientes ecuaciones de Maxwell:

(1) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l \longrightarrow$ cargas estacionarias producen campo eléctrico

(2) $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow$ No existen cargas magnéticas

(3) $\nabla \times \vec{E} = 0 \longrightarrow$ Trabajo desarrollado por campo eléctrico es conservativo

(4) $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \longrightarrow$ campo magnético "rota" en torno a corrientes

Los campos en la materia cumplen además con

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (6.95)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (6.96)$$

La fuerza neta sobre una carga es

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{\mu} \times \vec{B}\right) \quad (6.97)$$

Las ecuaciones anteriores se han deducido para campos estacionarios que sólo dependen de la posición.

$$\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r}\right) \text{ y } \vec{B} = \vec{B}\left(\vec{r}\right) \quad (6.98)$$

En lo que resta del curso veremos que ocurre cuando los campos son dependientes del tiempo, es decir, cuando $\vec{E} = \vec{E}\left(t, \vec{r}\right)$ y $\vec{B} = \vec{B}\left(t, \vec{r}\right)$.

6.18 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

Se tienen dos cables paralelos que llevan cada uno una corriente estable I_1 e I_2. Encuentre la fuerza por unidad de largo entre los cables si la distancia que los separa es d. ¿La fuerza atractiva o repulsiva?

Solución:

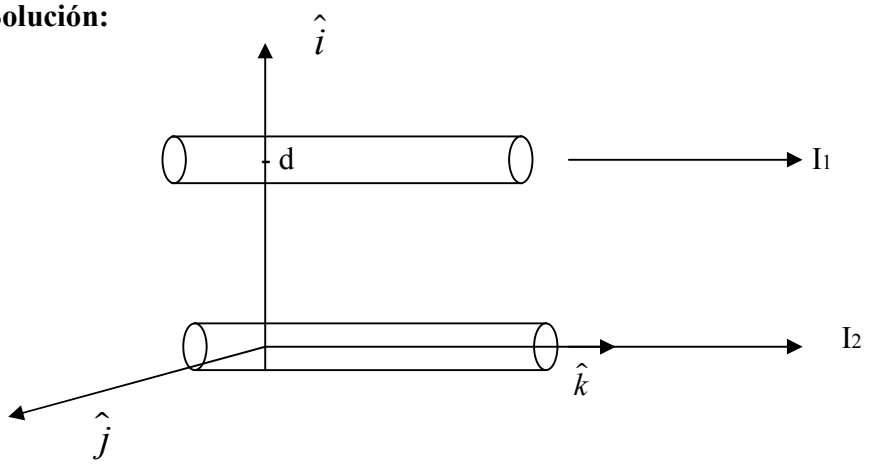


Figura P.6.1.1

Debemos calcular la fuerza que ejerce cada una de las corrientes sobre la otra por separado para después sumarlas.

Sabemos que la fuerza de un circuito sobre otro está dado por

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} \frac{I' Id\vec{l} \times \left(d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')\right)}{\left\|\vec{r} - \vec{r}'\right\|^3}$$

Escrito de otra forma:

$$\vec{F} = \int Idl \times \vec{B}'(\vec{r})$$

Pero nos interesa la fuerza por unidad de largo, por lo que al resolver la integral anterior nos queda

$\vec{F} = \int_0^L Idl \times \vec{B}'(\vec{r}) = L \cdot I \times \vec{B}'(\vec{r})$ lo que buscamos es la fuerza por unidad de longitud, por lo tanto, al dividir por L se obtiene la fórmula que utilizaremos en el problema para la fuerza por unidad de largo.

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = I_2 \times \vec{B}_1(r)$$

Donde $\vec{F}_{12}$ es la fuerza que ejerce por unidad de longitud el circuito uno sobre el circuito dos. Calculemos $\vec{B}_1(r)$ utilizando la ley circuital de Ampere $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encerrada}$

Para $r > a$

$$\Rightarrow B_1 2\pi r = \mu_0 I_1 \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

El campo sobre I2 resulta de evaluar en $r = d$, entonces:

$$\Rightarrow \vec{B_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}(-\hat{j})$$

Ahora, veamos la fuerza por unidad de largo que ejerce la corriente uno sobre la corriente dos.

$$\vec{F}_{12} = I_2 \hat{k} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}(-\hat{j}) = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi d}\hat{i}$$

De forma análoga calculamos $\vec{F}_{21}$ que corresponde a la fuerza por unidad de longitud que ejerce la corriente dos sobre la corriente uno.

Para $r > a$

$$\Rightarrow B_2 2\pi r = \mu_0 I_2 \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$$

El campo sobre I1 resulta de evaluar en $r = d$, entonces:

$$\Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}\hat{j}$$

Con esto la fuerza $\vec{F}_{21}$ queda dada por

$$\vec{F}_{21} = I_1 \hat{k} \times \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}\hat{j} = \frac{-I_1 I_2 \mu_0}{2\pi d}\hat{i}$$

La fuerza que se origina es atractiva.

PROBLEMA 2

Dado el vector potencial magnético $\vec{A} = -\frac{r^2}{4}\hat{k}\left[\frac{Wb}{m}\right]$, calcular el flujo total para cruzar la superficie.

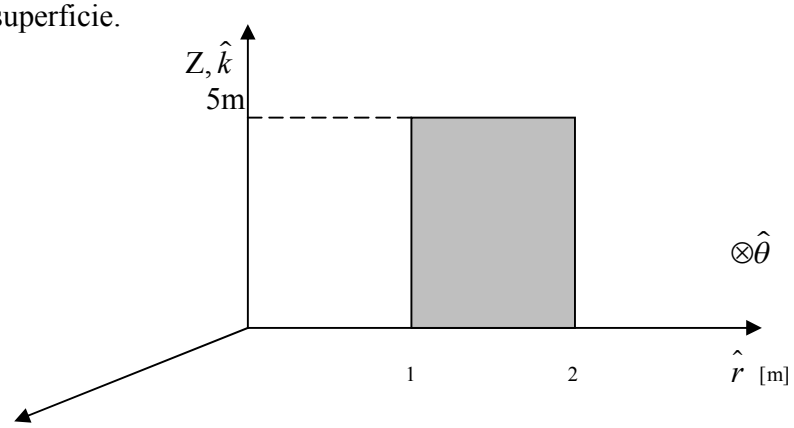


Figura P.6.2.1

$0 \le Z \le 5[m]$

$1 \le \rho \le 2[m]$

$\theta = \pi/2$

Solución:

Para encontrar el flujo primero encontraremos $\vec{B}$ para luego hacer $\psi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\delta A_z}{\delta r}\hat{\theta} = \frac{r}{2}\hat{\theta}$$

$$dS = drdz\hat{\theta}$$

$$\psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{r}{2}\hat{\theta} drdz\hat{\theta} = \frac{1}{2}\int_{z=0}^{5}\int_{r=1}^{2} rdrdz = \frac{1}{2}\frac{r^2}{2}\Big|_1^2 \cdot 5 = \frac{15}{4}[Wb]$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = \frac{15}{4}[Wb]}$$

Otro método de resolución:

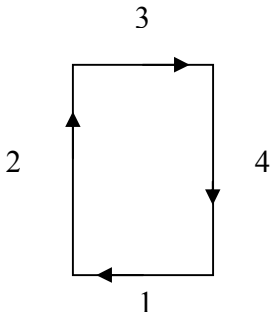


Figura P.6.2.2

$$\psi = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4$$

pero $\vec{A} = A\hat{k} \Rightarrow A\hat{k} \cdot d\vec{l}_{1,3} = 0$

$$\Rightarrow \psi = \psi_2 + \psi_4 = -\frac{1}{4}\left[\int_0^5 (1)^2 dz + \int_5^0 (2)^2 dz\right] = -\frac{1}{4}[5 + -20]$$

$$\Rightarrow \psi = -\frac{1}{4}[-15] = \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = \frac{15}{4}[Wb]}$$

PROBLEMA 3

Si por el plano x-y circula una densidad superficial de corriente $\vec{K} = K_0 \hat{j}$ se pide obtener $\vec{H}$ en todo el espacio.

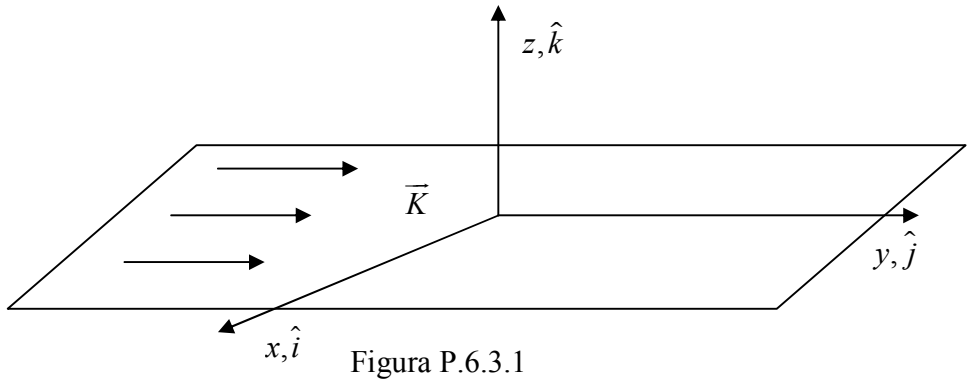


Figura P.6.3.1

Solución:

Utilizaremos la ley de Ampere, para ello nos damos una superficie de largo b y altura a que sea atravesada por la densidad de corriente tal como se muestra en la figura.

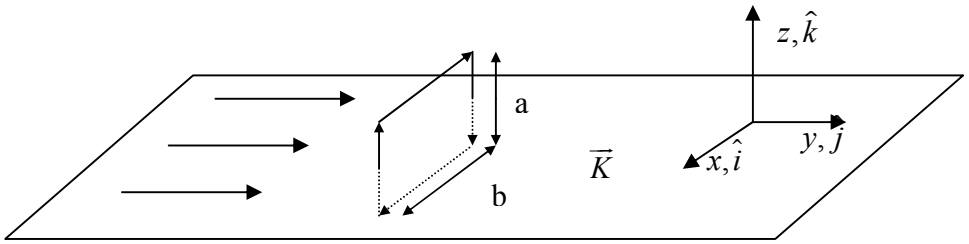


Figura P.6.3.2

Figura P.6.3.2

$$\oint \vec{H} \cdot dl = I_{encerrada} = K_0 \cdot b$$

$$\oint \vec{H} \cdot dl = 2Hb$$

$$\Rightarrow H = \frac{K_0}{2}$$

Para encontrar la dirección, ocupamos la regla de la mano derecha, llegando a la siguiente forma de $\vec{H}$

$$\vec{H} = \begin{cases} H\hat{i} & z > 0 \\ -H\hat{i} & z < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \begin{cases} K_0/2 \ \hat{i} & z > 0 \\ -K_0/2 \ \hat{i} & z < 0 \end{cases}$$

También se puede escribir como $\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{K} \cdot \hat{n}$ donde $\hat{n}$ es el vector normal al plano.

PROBLEMA 4:

Se tiene una franja delgada de metal de ancho a y muy larga. La corriente total es I. Calcular, por definición, el campo magnético en el plano de la franja a una distancia b del borde más cercano.

Solución:

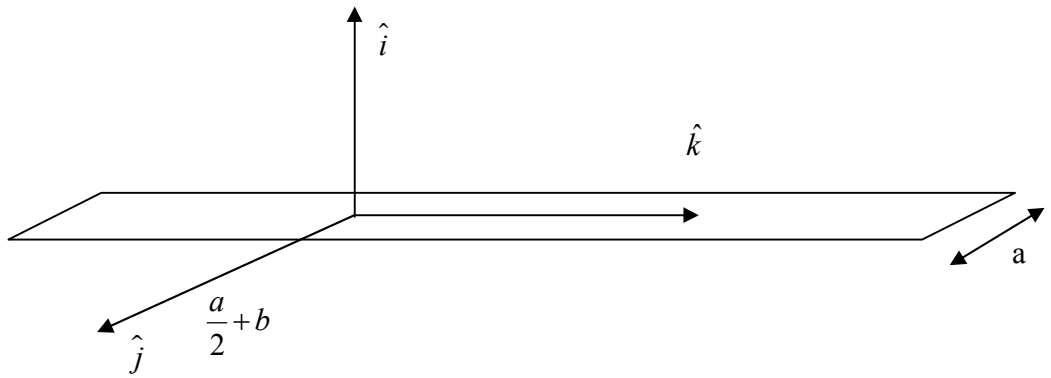


Figura P.6.34.1

Calculando el campo magnético por definición:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{J}(r') \times (r - r')}{\|r - r'\|^3} ds''$$

$$\vec{r} = (\frac{a}{2} + b)\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{r}' = y'\hat{j} + z'\hat{k}$$

$$\vec{J} = J\hat{k}$$

$$dS' = dz'dy'$$

Como la franja es delgada, es decir, despreciamos su espesor, podemos aproximar la densidad de corriente por $\vec{J} = \frac{I}{a}\hat{k}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J\hat{k}\times\left((a/2+b-y')\hat{j}+(z-z')\hat{k}\right)dz'dy'}{\left[(a/2+b-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{-\mu_0}{4\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J\left((a/2+b-y')\right)dz'dy'}{\left[(a/2+b-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\hat{i}$$

Usando el cambio de variable:

$$z - z' = (a/2 + b - y')tg\theta$$

$$-dz' = (a/2 + b - y')\sec^2\theta d\theta$$

Con esto:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(a/2+b-y'\right)\sec^2\theta}{\left[(a/2+b-y')^2+(a/2+b-y')^2\tan^2\theta\right]^{3/2}}d\theta dy'\hat{i}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(a/2+b-y')^2}\frac{\sec^2\theta}{\left[\underbrace{1+\tan^2\theta}_{\sec^2\theta}\right]^{3/2}}d\theta dy'\hat{i}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{(a/2+b-y')^2}d\theta dy'\hat{i} = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{1}{(a/2+b-y')^2}dy'\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta}_{2}\hat{i}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{2\pi}(a/2+b-y')^{-1}\Big|_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} = \frac{\mu_0 J}{2\pi}(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b})\hat{i}$$

PROBLEMA 5:
Calcular el campo magnético producido por un cascarón cilíndrico infinito de radio R por el que circula una corriente uniforme J en la dirección del eje del cilindro. Se pide el campo en todos los puntos, es decir, tanto dentro como fuera del cilindro.

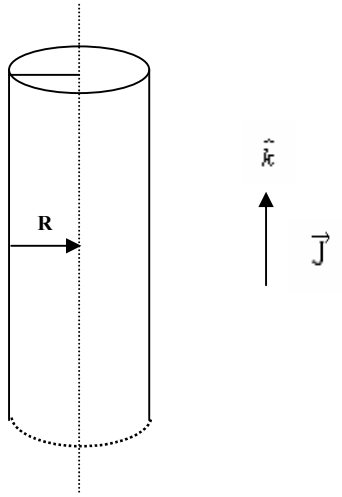


Figura P.6.5.1

Solución:

Para r>R

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = J 2\pi R$$

$$\Rightarrow$$

$$H 2\pi r = J 2\pi R$$

$$H = \frac{JR}{r} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 JR}{r}$$

$$B = \frac{\mu_0 JR}{r}\hat{\theta}$$

El campo magnético para r < R es nulo por la ley circuital de Ampere, debido a que la corriente enlazada es nula (cilindro hueco)

PROBLEMA 6:

Se tiene una partícula de masa m y carga q que se mueve en un campo magnético uniforme B. Demostrar que el movimiento más general de la partícula describe una hélice, cuya sección transversal es una circunferencia de radio $R = {mv}/{qB}$, donde v es la componente de la velocidad de la partícula que es perpendicular a B.

Solución:

$$\vec{B} = B\hat{k}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$m\left(\frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}\right) = q\left(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}\right) \times B\hat{k}$$

Entonces, se obtienen las ecuaciones:

$$\text{Ec}_1 : m\frac{dv_x}{dt} = qBv_y$$

$$\text{Ec}_2 : m\frac{dv_y}{dt} = -qBv_x$$

$$\text{Ec}_3 : m\frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow v_z = cte.$$

Derivando la ec. 1 con respecto al tiempo, y reemplazando Ec_2 :

$$m\frac{d^2v_x}{dt^2} = qB\frac{dv_y}{dt} \Rightarrow \frac{d^2v_x}{dt^2} + k^2v_x = 0, \text{ donde } k^2 = \left(\frac{qB}{m}\right)^2$$

La forma general de solución para esta ecuación es:

$$v_x = A\cos(kt) + B\sin(kt) \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = -Ak\sin(kt) + Bk\cos(kt)$$

pero de la Ec_1 se ve que $\frac{dv_x}{dt} = kv_y$, luego:

$$v_y = -A\sin(kt) + B\cos(kt)$$

Por otra parte, se tenía que $v_z = cte$, luego el movimiento de la partícula según el plano x-y es descrito por comportamientos sinusoidales, mientras que según el plano z el movimiento es constante, Entonces es posible concluir que el movimiento descrito por la partícula es una hélice, donde el plano x-y puede tener en general, una inclinación en un α con

respecto a la horizontal. De esta manera es posible ver que la velocidad de la partícula se puede expresar como $\vec{v}_p = \vec{v}_h + \vec{v}_z$.

Luego, sea:

$$V_o = \left\|\vec{v}_p\right\| = \underbrace{v_o \sin\alpha}_{\|\vec{v}_h\|} + \underbrace{v_o \cos\alpha}_{\|\vec{v}_z\|}\}$$

$$\left\|\vec{v}_h\right\| = \left\|v_x\hat{i} + v_y\hat{j}\right\|$$

Como es sabido, la posición de la partícula se obtiene trivialmente por medio de la integración de la velocidad:

$$x = \int v_x dt = \int \left(A\cos(kt) + B\sin(kt)\right)dt = {}^{A}\!/_{k}\sin(kt) - {}^{B}\!/_{k}\cos(kt) + cte_1$$

$$y = \int v_y dt = {}^{A}\!/_{k}\cos(kt) + {}^{B}\!/_{k}\sin(kt) + cte_2$$

Sin pérdida de generalidad: $cte_1 = cte_2 = 0$

Además, la posición de la partícula está dada por:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{v_h}{k}$$

De donde se obtiene lo que se quiere demostrar:

$$R = \frac{mv_h}{qB}$$

PROBLEMA 7:

Demostrar que la fuerza entre alambres paralelos que conducen corrientes de intensidad I_1 e I_2, ambas en la misma dirección según $\hat{i}$, es atractiva. Si los dos alambres paralelos son muy largos y están separados por una distancia a, hallar la fuerza magnética sobre el segmento dI_2 del alambre 2.

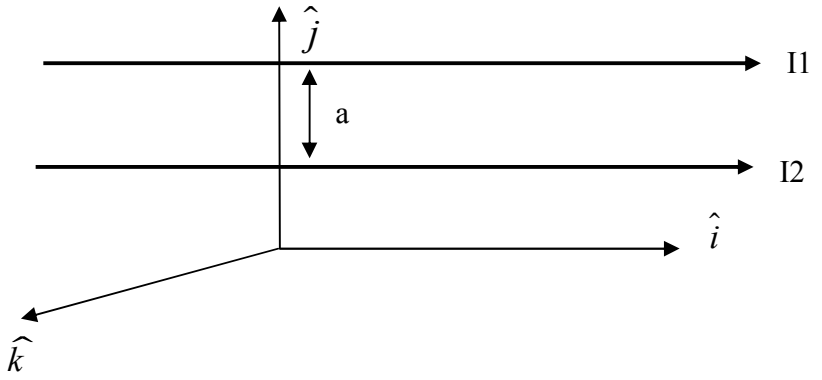


Figura P.6.7.1

Solución:
El campo magnético producido por un alambre infinito es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi r}\hat{\theta}$$

La Fuerza de (1) sobre (2) está dado por:

$$d\vec{F}_{21} = I_2 dx\hat{i} \times \frac{\mu_o I_1}{2\pi a}(-\hat{k}) \Rightarrow d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi a} dx\,\hat{j}$$

El sentido de la fuerza va según $\hat{j}$, es decir, hay atracción siempre y cuando:

$$d\vec{F}_{21} > 0 \Leftrightarrow I_1 I_2 > 0$$

Entonces, existe atracción en la medida que las corrientes por los alambre paralelos sean en el mismo sentido, o habrá repulsión cuando las corrientes circulantes sean de direcciones opuestas.

PROBLEMA 8.

Considere una espira rectangular en presencia de un alambre infinito por el cual circula una corriente $I(t) = I_0 \cos(wt)$ (Considere que el alambre coincide con el eje z) según se muestra en la Figura P.6.8.1.

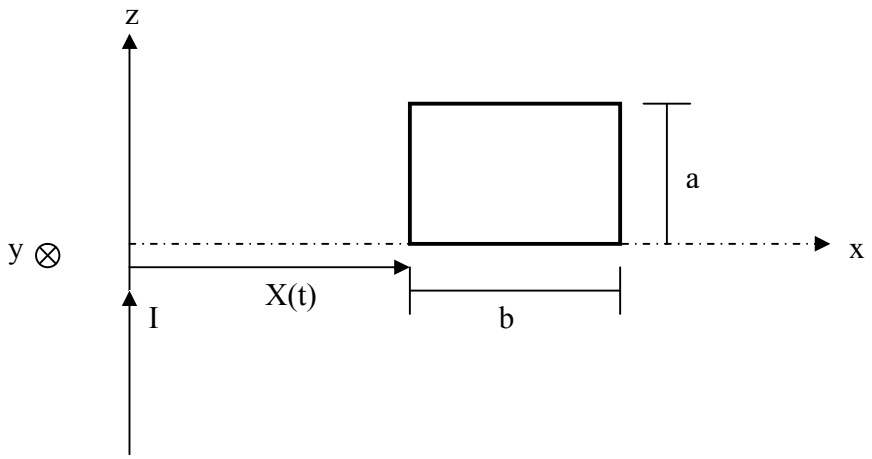


Figura P.6.8.1

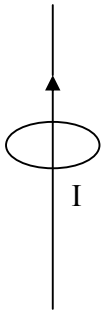
A una distancia $X(t)$ se ubica un circuito rectangular de lados a y b, el cual se encuentra detenido y estático. Se pide:

i. Si la espira tiene una resistencia total R diga si hay corriente al interior de ella y en caso afirmativo, calcule su sentido y valor.
ii. Determine el torque sobre el circuito rectangular
iii. Suponga ahora que la corriente en el alambre infinito es I_0, se pide determinar la velocidad del circuito rectangular ($\partial X / \partial t$) para generar la misma corriente calculada en i).

Hint: Suponga que el campo generado por la corriente del circuito cuadrado es despreciable frente al campo del alambre infinito.

<u>*Solución*</u>:

i)



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$H 2\prod r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\prod r} \Rightarrow B = \frac{u_o I}{2\prod r} = \frac{u_o I}{2\prod x}$$

con $I(t) = I_0 \cos(wt)$

$$\phi = \iint \vec{B} \circ d\vec{S} \Rightarrow \phi = \int_0^a \int_x^{x+b} \frac{u_o I}{2\prod x} dx dz = \frac{u_o I a}{2\prod} \int_x^{x+b} \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{u_o I a}{2\prod} \left(\ln(x+b) - \ln(x) \right)$$

$$\Leftrightarrow \phi = \frac{u_o I a}{2\prod} \ln\left(\frac{x+b}{x} \right)$$

→ Flujo externo

El voltaje inducido es: → producto de la corriente inducida

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\phi_{externo} + \phi_{\text{int erno}}\right] = -\left[\frac{d\phi_{externo}}{dt} + \underbrace{\frac{d\phi_{\text{int erno}}}{dt}}\right]$$

Despreciable por enunciado

$$e = -\frac{d}{dt}\left(\frac{u_o I a}{2\prod}\ln\left(\frac{x+b}{x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow e = -\left[\frac{u_o \dot{I} a}{2\prod}\ln\left(\frac{x+b}{x}\right) + \frac{u_o I a}{2\prod}\frac{1}{\frac{x+b}{x}}\left(\frac{\dot{x}x - (x+b)\dot{x}}{x^2}\right)\right]$$

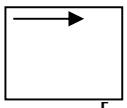
$$\Rightarrow e = -\left[-\frac{u_o a w I_o sen(wt)}{2\prod}\ln\left(\frac{x+b}{x}\right) + \frac{u_o I a}{2\prod}\frac{x}{x+b}\left(\frac{-b\dot{x}}{x^2}\right)\right]$$

$$e = \frac{u_o a w I_o sen(wt)}{2\prod}\ln\left(\frac{x+b}{x}\right) + \frac{u_o I_o \cos(wt) ab\dot{x}}{2\prod x(x+b)}$$

$$e = RI \Rightarrow I = \frac{e}{R} = \frac{u_o a w I_o sen(wt)}{2\prod R}\ln\left(\frac{x+b}{x}\right) + \frac{u_o I_o \cos(wt) ab\dot{x}}{2\prod Rx(x+b)}$$

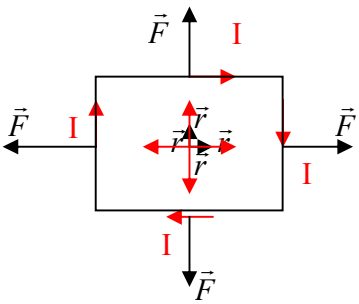
Si $\dot{x} = 0 \Rightarrow I = \frac{u_o a w I_o}{2\prod R} sen(wt)$ $\qquad$ $w = \frac{2\prod}{T}$

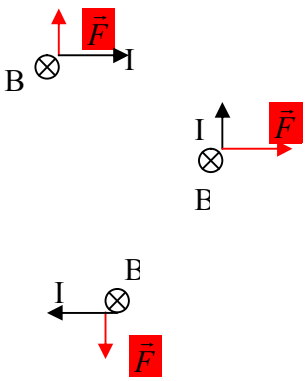
I



Para $t \in \left[0, T/2\right]$

ii)





$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{r} // \vec{F} \Rightarrow \vec{\tau} = 0$$

iii) Si $I = I_o \Rightarrow \phi = \dfrac{u_o I_o a}{2\prod} \ln\left(\dfrac{x+b}{x}\right)$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\left[\frac{u_o I_o a}{2\prod}\frac{x}{x+b}\left(\frac{\dot{x}x - (x+b)\dot{x}}{x^2}\right)\right]$$

$$e = \frac{I_o u_o a b \dot{x}}{2\prod(x+b)x} \Rightarrow I = \frac{I_o u_o a b \dot{x}}{2\prod(x+b)xR}$$

Igualando esta corriente con la de la parte i)

$$\frac{I_o u_o a b \dot{x}}{2\prod(x+b)xR} = \frac{u_o a b w I_o}{2\prod R} sen(wt)$$

$$\dot{x} = x(x+b)wsen(wt)$$

$$\dot{x} = x(x,t)$$

↳ Quedo en función de x también. Con esto bastaba.

PROBLEMA 9.

Se dispone de un emisor radioactivo que emite partículas cargadas de diferente velocidad en dirección horizontal, tal como se muestra en la Figura P.6.9.1

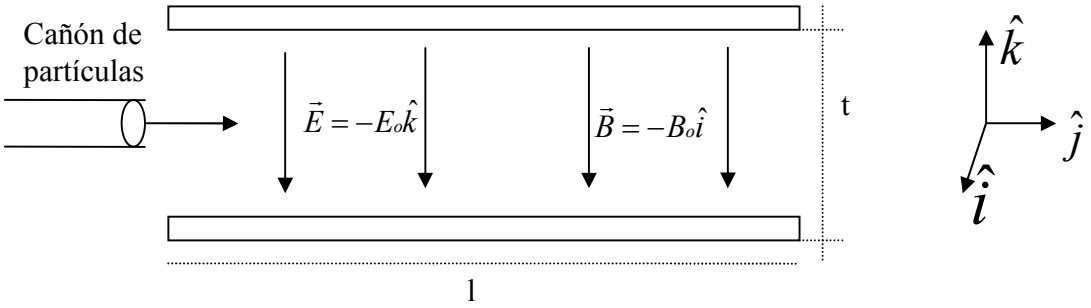


Figura P.6.9.1

Para seleccionar las partículas en función de su velocidad, se construye un sistema compuesto por dos placas conductoras, las cuales generan un campo eléctrico $\vec{E} = -E_o\hat{k}$. Además, en el mismo espacio se genera un campo magnético constante $\vec{B} = -B_o\hat{i}$. Ambos campos se suponen conocidos.

Suponiendo que la salida del cañón de partículas sólo tienen velocidades según $\hat{j}$, y despreciando el efecto de gravedad, se pide:

i. Determinar la velocidad para la cual las partículas pasan inalteradas por el sistema, independiente de su masa y carga (su velocidad se mantiene constante)
ii. Para velocidades menores a las calculadas en i) se pide determinar la razón entre masa y carga de las partículas que logran pasar por el sistema de placas (no quedan atrapadas en la placa inferior)

i)

$$\vec{F} = q\vec{v}x\vec{B} + q\vec{E}$$
$$\vec{F} = q(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})x(-B_o\hat{i}) + -qE_o\hat{k}$$
$$\vec{F} = qB_o\dot{y}\hat{k} - qB_o\dot{z}\hat{j} - qE_o\hat{k}$$
$$\vec{F} = (qB_o\dot{y} - qE_o)\hat{k} - qB_o\dot{z}\hat{j}$$
$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k})$$

Igualando términos:

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = -qB_o\dot{z}$$
$$m\ddot{z} = qB_o\dot{y} - qE_o$$

Si $\vec{v} = cte \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \dot{z} = 0 \Rightarrow 0 = qB_o\dot{y} - qE_o \Rightarrow \dot{y} = \frac{E_o}{B_o}$

ii) Caso general:

$$m\ddot{y} = -qB_o\dot{z} \xrightarrow{d/dt} m\dddot{y} = -qB_o\ddot{z} \Rightarrow \ddot{z} = \frac{-m}{qB_o}\dddot{y}$$

$$/\cdot\frac{qB_o}{m^2}\quad m\ddot{z} = qB_o\dot{y} - qE_o \Rightarrow m(\frac{-m}{qB_o}\dddot{y}) = qB_o\dot{y} - qE_o$$

$$\dot{y} = v_y \qquad \dot{z} = v_z$$

$$-\dddot{y} = \left(\frac{qB_o}{m}\right)^2\dot{y} - \frac{q^2B_oE_o}{m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{q^2B_oE_o}{m^2} = \dddot{y} + \left(\frac{qB_o}{m}\right)^2\dot{y}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{v}_y + \left(\frac{qB_o}{m}\right)^2 v_y = \frac{q^2 B_o E_o}{m^2} \qquad \text{(1 punto)}$$

Solución homogénea: $\ddot{v}_y + \left(\frac{qB_o}{m}\right)^2 v_y = 0 \Rightarrow v_y = A\cos\left(\frac{qB_o}{m}t\right) + Bsen\left(\frac{qB_o}{m}t\right)$

Solución particular: $v_y = cte \Rightarrow v_y = \frac{E_o}{B_o}$

$$v_y = v_{y\,\text{hom}\,ogenea} + v_{yparticular}$$

Solución general: $v_y(t) = A\cos\left(\frac{qB_o}{m}t\right) + Bsen\left(\frac{qB_o}{m}t\right) + \frac{E_o}{B_o}$

$$y(t) = A\frac{m}{qB_o}sen\left(\frac{qB_o}{m}t\right) - B\frac{m}{qB_o}\cos\left(\frac{qB_o}{m}t\right) + \frac{E_o}{B_o}t$$

$$v_y(t=0) = v_o = A + \frac{E_o}{B_o} \Rightarrow A = v_o - \frac{E_o}{B_o}$$

Condiciones iniciales: $y(t=0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$$\therefore v_y(t) = \left(v_o - \frac{E_o}{B_o}\right)\cos\left(\frac{qB_o}{m}t\right) + \frac{E_o}{B_o}$$

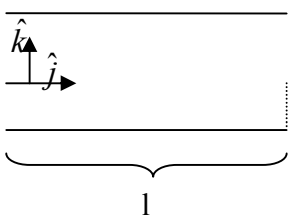
Para v_z :

$$m\ddot{y} = -qB_o\dot{z} \Rightarrow v_z = -\frac{m}{qB_o}\ddot{y}$$

$$\Rightarrow v_z = -\frac{m}{qB_o}\left[-\left(v_o - \frac{E_o}{B_o}\right)\frac{qB_o}{m}sen\left(\frac{qB_o}{m}t\right)\right]$$

$$v_z = \left(v_o - \frac{E_o}{B_o}\right)sen\left(\frac{qB_o}{m}t\right)$$

$$\Rightarrow z(t) = -\left(v_o - \frac{E_o}{B_o}\right)\frac{m}{qB_o}\cos\left(\frac{qB_o}{m}t\right) + \overbrace{cte}^{=0}$$



Sea $t = t^*$ el tiempo cuando las cargas llegan a la posición z = -h/2

$$\Rightarrow z(t^*) = -\frac{h}{2} = -\left(v_o - \frac{E_o}{B_o}\right)\frac{m}{qB_o}\cos\left(\frac{qB_o}{m}t^*\right)$$

$$\Rightarrow \frac{hqB_o}{2m\left(v_o - \frac{E_o}{B_o}\right)} = \cos\left(\frac{qB_o}{m}t^*\right)$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{m}{qB_o}\cos^{-1}\left(\frac{hqB_o}{2m\left(v_o - \frac{E_o}{B_o}\right)}\right)$$

Reemplazo en $y(t) \Rightarrow y(t^*) = l = \left(v_o - \frac{E_o}{B_o}\right)\frac{m}{qB_o}sen\left(\frac{qB_o}{m}t^*\right) + \frac{E_o}{B_o}t^*$

Razón

Ecuación no lineal para m/q

PROBLEMA 10.

Una línea de transmisión coaxial llena de un material con permitividad no lineal tiene un conductor interno sólido de radio a y un conductor externo muy delgado de radio interior b, tal como se ilustra en la Figura P.6.10.1.

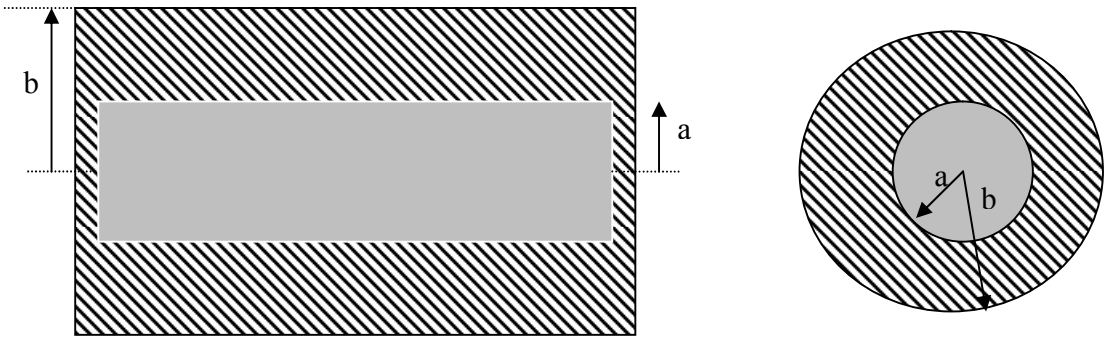
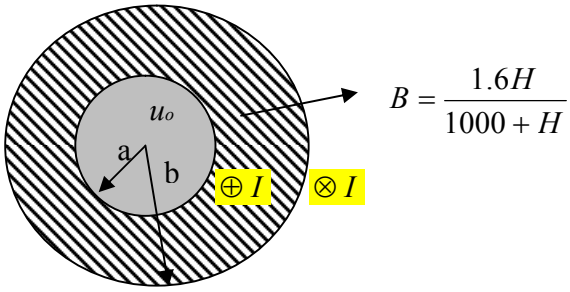


Figura P.6.10.1

Si la curva de magnetización del material se puede aproximar por $B = 1.6H/(1000 + H)$. Suponiendo que en el conductor interno circula una corriente I_o hacia la derecha y vuelve en la dirección opuesta por el conductor externo, calcule el campo magnético en todo el espacio.

Hint: Suponga que en el conductor interno la corriente se distribuye en forma homogénea. Por su parte, suponga que el conductor externo no tiene grosor.



$$B = \frac{1.6H}{1000 + H}$$

Para r<a:

$$J = \frac{I}{\prod a^2} \Rightarrow I_{enc} = J \prod r^2 = \frac{Ir^2}{a^2}$$

$$\int Hdl = I_{enc} \Leftrightarrow H \cdot 2\prod r = \frac{Ir^2}{a^2}$$

$$\vec{H}(r) = \frac{Ir}{2\prod a^2}\hat{\theta} \Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{u_o Ir}{2\prod a^2}\hat{\theta}$$

a<r<b:

$$I_{enc} = I$$

$$\int Hdl = I_{enc} \Leftrightarrow H \cdot 2\prod r = I$$

$$\Rightarrow \vec{H}(r) = \frac{I}{2\prod r}\hat{\theta}$$

$$Pero \ldots B = \frac{1.6H}{1000 + H} = \frac{1.6\left(\frac{I}{2\prod r}\right)}{1000 + \left(\frac{I}{2\prod r}\right)} = \frac{1.6I}{1000 \cdot 2\prod r + I}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{1.6I}{1000 \cdot 2\prod r + I}\hat{\theta}$$

Para r>b:

$$I_{enc} = 0$$

$$\int Hdl = I_{enc} \Rightarrow H \cdot 2\prod r = 0$$

$$\Rightarrow H = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

6.18 Problemas Propuestos

PP. 1

Se tiene un disco de radio R y densidad de carga σ que gira con velocidad angular w. Determinar el campo magnético en el eje de simetría.

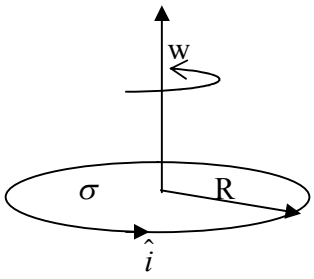


Figura PP.6.1

PP. 2

Considere dos discos coaxiales de radios a y b respectivamente (b>a) separados por una distancia h tal como lo ilustra la Figura P6.2. Suponga que h>>a,b. Se pide calcular el vector campo magnético en el eje z.

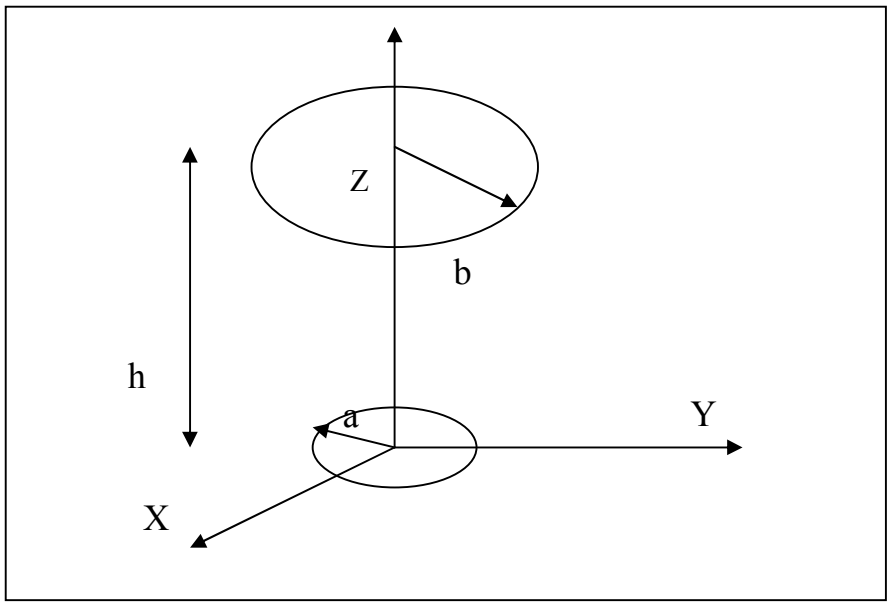


Figura PP6.2

PP.3 Un motor de plasma es ideado para naves espaciales, el cual se construye con dos rieles conductores entre los cuales se produce un campo magnético B, según se muestra en la Figura PP6.3.

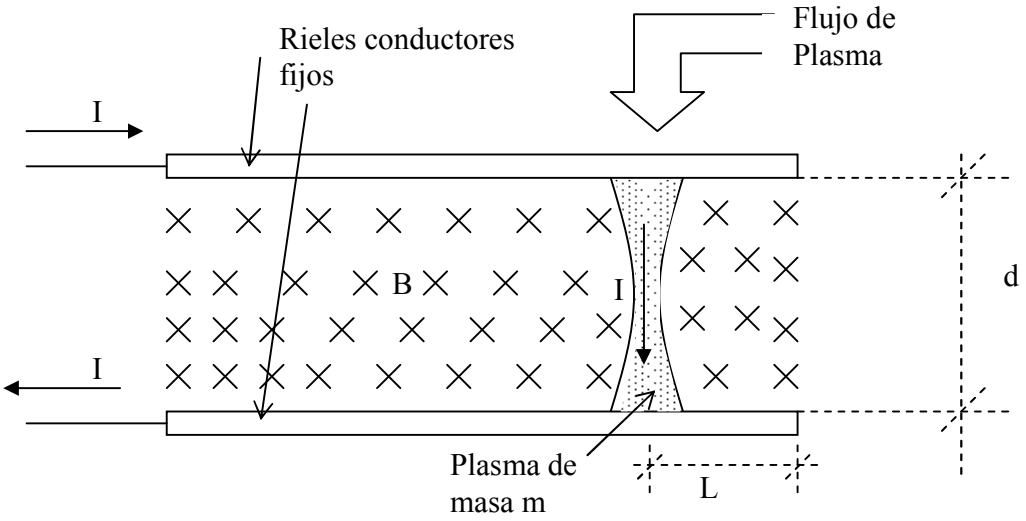


Figura PP6.3.

Una corriente de 1000 [A] fluye a través de dos rieles conductores, los cuales están comunicados mediante un pulso de plasma de masa m=10 kg, el cual puede moverse sin perder su forma (conexión a ambos rieles) una distancia L=1m. Suponga que la distancia entre los rieles es de d=30 cms y que el plasma tiene forma cilíndrica.
Se pide:

a) Estime la fuerza sobre la columna de plasma,
b) Si una nave se equipa con este motor, calcule la velocidad de expulsión del plasma (extremo derecho en el dibujo),
c) Suponiendo que la nave está en el espacio y que pesa 5 tons, estime el aumento de la velocidad que produce un disparo (una columna) del pulso de plasma.

PP.4 Se dispone de un circuito de forma rectangular por el cual circula una corriente I=2[A], según se muestra en la Figura PP6.4.

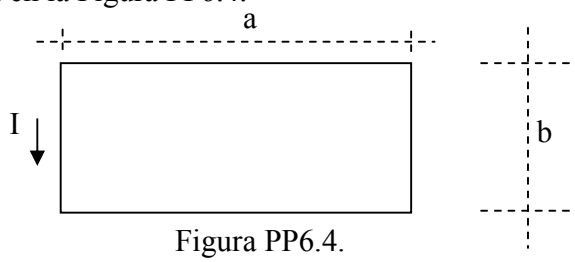


Figura PP6.4.

Se pide:

a) Calcule el campo magnético en el centro del circuito si a= 2 m y b=1m.
b) Si el conductor posee una conductividad g=6x107 [mho/m] y una sección de 1mm2, se pide calcular la potencia disipada en el conductor.