



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA
Avda. Tupper 2007 – Casilla 412-3 - Santiago – Chile
Fono: (56) (2) 978 4207, Fax: (56) (2) 695 3881

APUNTES DE ELECTROMAGNETISMO

CAPITULO 5 CORRIENTE ELECTRICA

Luis Vargas D.

**Departamento de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile**

Versión Otoño 2008

INDICE

CAPITULO 5. CORRIENTE ELECTRICA.....	3
5.1 Modelo de Medios Materiales Conductores.....	3
5.2 Definición de Corriente.....	4
5.3 Densidad de Corriente.....	7
5.4 Ley de Ohm.....	11
5.5 Fuerza electromotriz.....	15
5.6 Efecto Joule.....	17
5.7 Cargas en medios materiales.....	19
5.8 Corriente de Convección.....	21
5.9 Ecuación de Continuidad.....	23
5.10 Ecuación de Continuidad en Medios Materiales.....	24
5.11 Condiciones de Borde para \vec{J}.....	26
5.12 Ley de Voltajes de Kirchoff.....	32
5.13 Ley de Corrientes de Kirchoff.....	34
5.14 Problemas Resueltos.....	37
5.15 Problemas Propuestos.....	43

INDICE FIGURAS

INDICE TABLAS

Tabla 3. Conductividad (aproximada)de algunos materiales a 20°C.....	13
--	----

CAPITULO 5. CORRIENTE ELECTRICA

5.1 Modelo de Medios Materiales Conductores

En electrostática modelamos un conductor como un medio material que dispone de abundante carga libre, la cual puede desplazarse sin obstáculos hasta alcanzar el estado de equilibrio cuando se le ha aplicado un campo eléctrico externo. En el estado de equilibrio vimos que el campo eléctrico al interior del conductor era nulo.

Ahora veremos el fenómeno de la conducción eléctrica y utilizaremos un modelo más elaborado de la materia, pero que incluye al visto anteriormente en electrostática. La principal diferencia con el caso anterior radica en el hecho de que ahora los conductores no terminan en una pared definida, sino que se extienden en circuitos cerrados, tal como se muestra en la Figura 89.

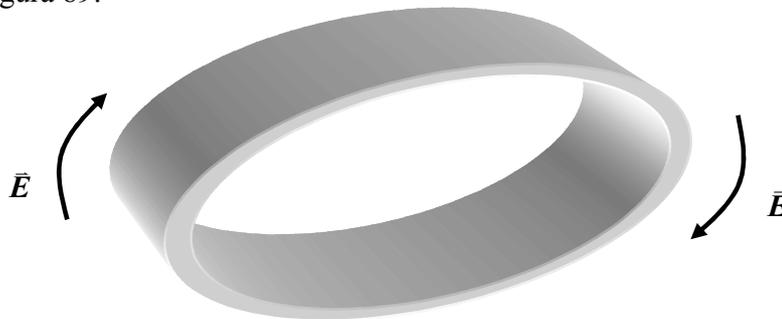


Figura 89. Corriente en circuitos.

Supongamos que en la Figura 89 se aplica un campo eléctrico circular de magnitud constante en todo el medio conductor. Si usamos el modelo de conductor visto hasta aquí, las cargas al interior se moverán debido a la fuerza ejercida por dicho campo, pero no se alcanzaría la situación de equilibrio ya que el conductor no termina en ninguna parte. Como la fuerza sobre cada carga es constante $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ (5.1), las cargas se acelerarían indefinidamente, cosa que no ocurre en la realidad.

Por ello es necesario ampliar este modelo incorporando las colisiones que experimentan las cargas cuando se desplazan en el medio material. En efecto, al avanzar las cargas bajo la influencia de la fuerza eléctrica colisionan con la estructura de la red atómica hasta alcanzar una velocidad de desplazamiento estacionaria en promedio (v_d). Esta es la nueva situación de equilibrio dinámico del fenómeno de la conducción eléctrica, es decir, al aplicar un campo eléctrico constante a un conductor como en la Figura 89, los electrones (y cargas de desplazamiento en general) alcanzan una velocidad de desplazamiento constante en régimen permanente (para un tiempo suficientemente largo). Dicha velocidad dependerá desde luego del campo eléctrico y de la estructura del medio material. Los electrones con capacidad de movimiento en el medio forman un tipo especial denominado electrones de conducción o electrones libres.

5.2 Definición de Corriente

La corriente eléctrica es el fenómeno de desplazamiento de cargas en un medio material. Como vimos anteriormente, dicho desplazamiento incluye mayoritariamente a los electrones, ya que éstos disponen de mayor movilidad al interior de los medios.

Consideremos un trozo de material al cual se le aplica un campo eléctrico externo como en la Figura 90.

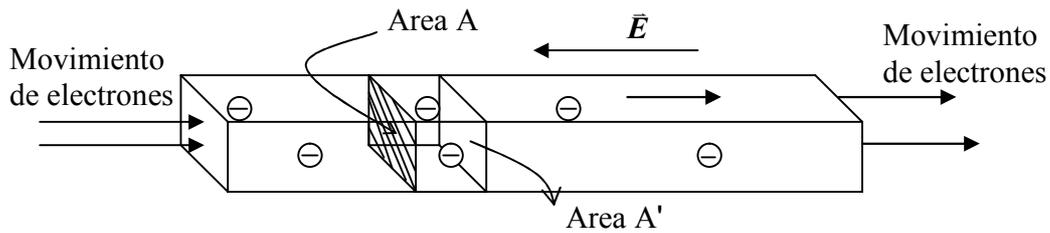


Figura 90. Corriente eléctrica.

Si tomamos el plano A que corta transversalmente el medio material de la figura, se define la corriente I como:

$$I = \frac{dQ}{dt} [C / seg] = [A] \quad (5.2) \text{ esta unidad se llama Ampere.}$$

donde Q es la carga total que atraviesa el plano A en el sentido de \vec{E} .

Sin entrar en mayores detalles, físicamente lo que ocurre es que en el estado estacionario los electrones se desplazan con velocidad promedio constante y sin acumularse en ningún punto. Así, para una misma área desplazada una pequeña distancia de A, tal como A' en la Figura 90, la corriente será la misma.

De esta forma, para cualquier volumen Ω de un conductor, tal como el ilustrado en la Figura 91, en estado estacionario los electrones se desplazan manteniendo la carga neta nula.

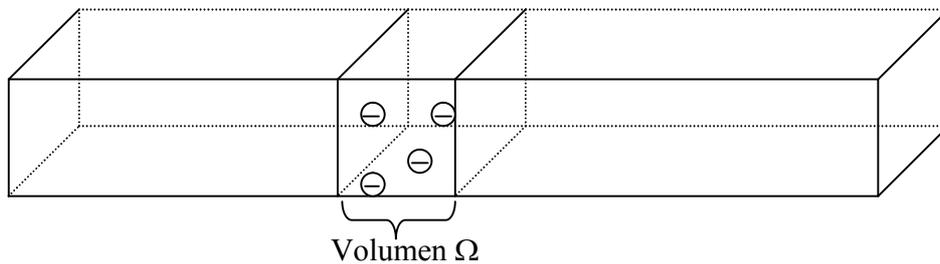


Figura 91. Carga neta nula.

Si designamos por ρ_e la densidad volumétrica de electrones de conducción y ρ_R a la del resto de las cargas en el volumen Ω , entonces

$$\iiint_{\Omega} \rho_e dv + \iiint_{\Omega} \rho_R dv = 0 \quad (5.3) \quad \text{para todo tiempo } t \text{ en estado estacionario.}$$

Así, al aplicar un campo externo se moverán los electrones, pero el número total de electrones por unidad de volumen sigue constante.

Consideremos que en este material existe n electrones libres por unidad de volumen que pueden desplazarse en presencia de un campo externo. Supongamos que v_d es la velocidad de desplazamiento promedio de esos electrones.

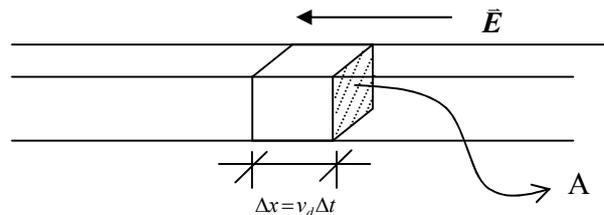


Figura 92. Electrones de combinación.

Entonces, en un tiempo Δt las partículas avanzarán una distancia Δx y atravesarán el área A . En otras palabras, todas las partículas contenidas en el volumen $A v_d \Delta t$ pasan a través del área A en un tiempo Δt . La carga total que atraviesa el área A es por lo tanto:

$$\Delta Q = q n A v_d \Delta t \quad (5.4)$$

donde q es la carga de una partícula. Luego la corriente que atraviesa la superficie es:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{q n A v_d \Delta t}{\Delta t}$$

$$\therefore I = q n A v_d [A] \quad (5.5)$$

Así, la corriente es positiva en el sentido contrario al movimiento de los electrones.

$$\Rightarrow I = -e n A v_d [A] \quad (5.6)$$

EJEMPLO 23

Determine la velocidad promedio de desplazamiento de los electrones en un alambre de cobre típico de radio 0.0814 cm que transporta una corriente de 1[A]. Suponga que existen 8.46×10^{22} electrones libres de moverse por cada cm^3 de cobre.

Sol:

$$I = n \times q \times v_d \times A \Rightarrow v_d = \frac{I}{n \times q \times A} \quad (5.7)$$

$$A = \pi \times (0.0814)^2 \text{ cm}^2$$

$$n = 8.46 \times 10^{22} [\text{es} / \text{cm}^3]$$

$$q = 1.6 \times 10^{-19} [\text{C}]$$

$$I = 1 [\text{C} / \text{seg}]$$

$$\Rightarrow v_d = \frac{1 [\text{C} / \text{seg}]}{\pi \times (0.0814)^2 \times 8.46 \times 10^{22} \times 1.6 \times 10^{-19}} [\text{C} / \text{cm}^3] \times [\text{cm}^2]$$

$$v_d = 3.55 \times 10^{-3} [\text{cm} / \text{s}]$$

5.3 Densidad de Corriente

Consideremos un conductor muy delgado por donde transita una corriente I , según se ilustra en la Figura 93.

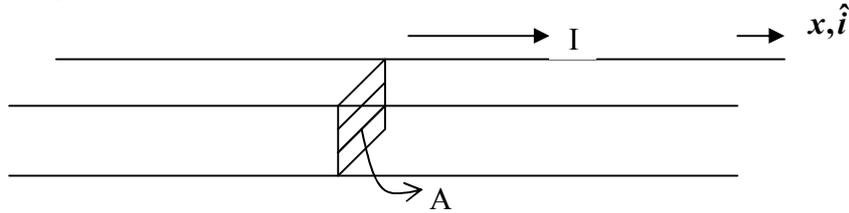


Figura 93. Corriente por unidad de superficie.

Se define la densidad de corriente \vec{J} como un vector que indica la corriente por unidad de superficie. Para el caso de la Figura 90.

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \hat{i} \text{ [A/m}^2\text{]} \quad (5.8)$$

Así, \vec{J} tiene la dirección de la corriente. Para el caso de las partículas visto en el ejemplo anterior se tiene $\vec{J} = \frac{I}{A} \hat{i} = qn v_d \hat{i}$ (vector en sentido contrario al movimiento de electrones).

Por extensión, cuando se tienen superficies mayores como en la Figura 94 se define \vec{J} como

$$\vec{J}(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \hat{i} \quad (5.9)$$

donde ΔI es la cantidad de corriente que atraviesa en forma ortogonal al elemento de área ΔS e \hat{i} es la dirección de la corriente (y normal al elemento de área).

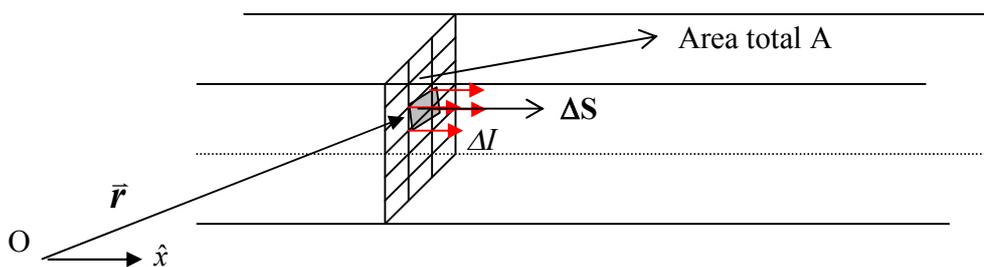


Figura 94. Vector densidad de corriente.

Así, la corriente que atraviesa el área A (en el sentido de $d\vec{S} = dS \hat{x}$) es

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (5.10)$$

En general el vector densidad de corriente variará con la posición.

EJEMPLO 24.

Un conductor ideal tiene la forma irregular de la Figura 92.

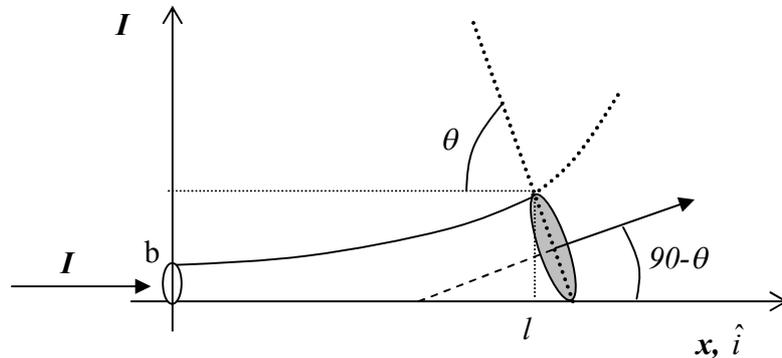


Figura 95.

La curva del límite superior del conductor es $y = ax^2 + 2b$, la cual es válida en todo el largo l del conductor. Por el conductor circula una corriente I , la cual ingresa y sale del conductor perpendicular a los planos que lo limitan. Se pide calcular el vector densidad de corriente en los planos extremos del conductor.

Solⁿ

Supondremos que la corriente se distribuye en forma homogénea al interior del conductor. Por ello, en el extremo $x=0$, el vector densidad de corriente se distribuye homogéneamente en el disco de radio b y apunta en dirección \hat{i} . Así,

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi b^2} \hat{i}$$

En el otro extremo, el plano de salida del conductor forma un ángulo θ con el eje x . Dicho ángulo se forma entre la ortogonal a la tangente de la curva $y = ax^2 + 2b$, evaluada en $x=l$, y el eje x . La tangente está definida por la curva $y' = 2ax$, que por definición corresponde a $\text{tg}(90-\theta)$ en $x=l$, es decir,

$$\text{tg}(90-\theta) = 2al$$

aplicando identidades trigonométricas $\cos(90-\theta) = [1 + \text{tg}^2(90-\theta)]^{-1/2} = (1 + 4a^2 l^2)^{-1/2}$ y

$$\sin(90-\theta) = 2al(1 + 4a^2 l^2)^{-1/2}.$$

De las leyes de semejanza de triángulos obtenemos el radio del disco en el extremo de salida del conductor

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(al^2 + 2b)^2 + (al^2 + 2b)^2 \text{tg}^2(90-\theta)} = \frac{1}{2} (al^2 + 2b) \sqrt{1 + \text{tg}^2(90-\theta)} = \frac{1}{2} (al^2 + 2b) \sqrt{1 + 4a^2 l^2}$$

Con ello finalmente el vector densidad de corriente en el plano de salida es

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi r^2} (\cos(90-\theta) \hat{i} + \sin(90-\theta) \hat{j})$$

En forma análoga podemos definir un vector densidad de corriente superficial cuando se estudian distribuciones de corriente en superficie. Supongamos que tenemos una corriente fluyendo en el plano y-z, según se muestra en la Figura 96.

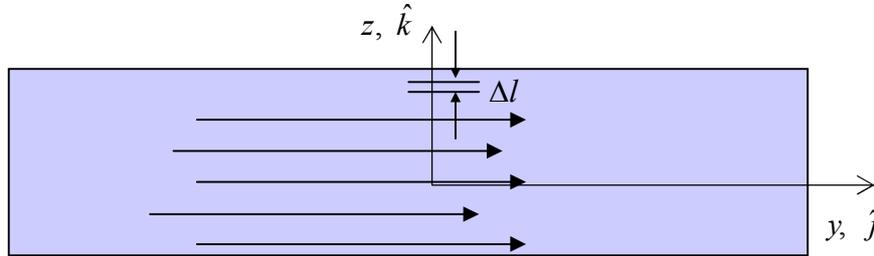


Figura 96. Densidad superficial de corriente.

Se define el vector densidad de corriente superficial \vec{K} [A/m] como

$$\vec{K}(\vec{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \hat{j} \quad (5.11)$$

Inversamente, cuando disponemos del vector podemos calcular la corriente atravesando un tramo de ancho L como

$$I = \int_0^L \vec{K} \cdot \hat{j} dl \quad (5.12)$$

EJEMPLO 25.

Considere un conductor toroidal que transporta una corriente I según se muestra en la Figura 97. Suponga que se desea tener una representación equivalente en dos dimensiones de este conductor a través de una cinta. Se pide determinar la corriente superficial por esta cinta resultante (imagine que resulta de aplastar al toroide hasta dejarlo plano).

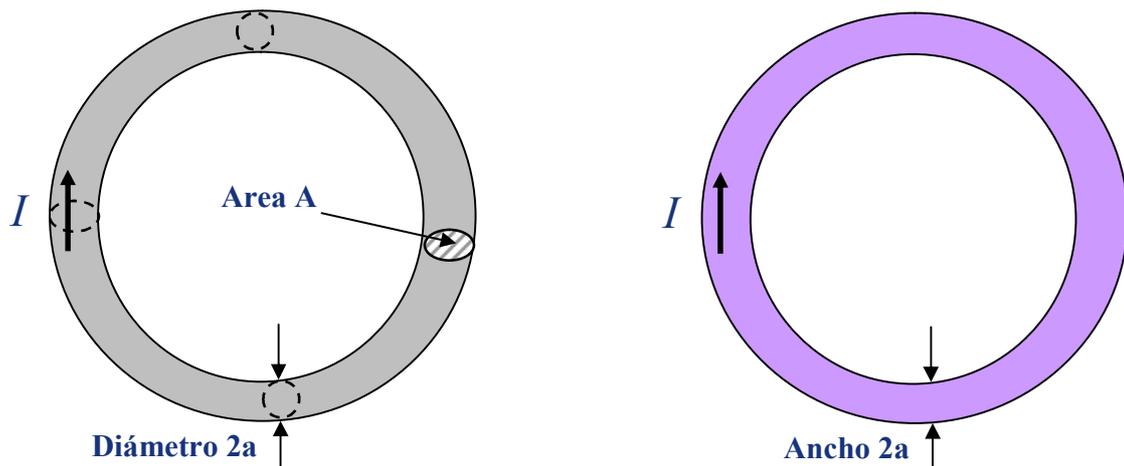


Figura 97

Sol.

En la Figura 94, en el lado izquierdo esta representado el toroide (de tres dimensiones) de sección transversal A. En el lado derecho se presenta la cinta (dos dimensiones) de ancho

2a. Ambos elementos conducen la misma corriente total I , es decir la sección transversal del toroide es atravesada por la misma corriente que atraviesa por un corte transversal de la cinta. Esta situación se ilustra en la Figura 98. La figura del lado derecho es una ampliación de la sección del toroide. La proyección bajo esa sección es un trozo transversal de la cinta.

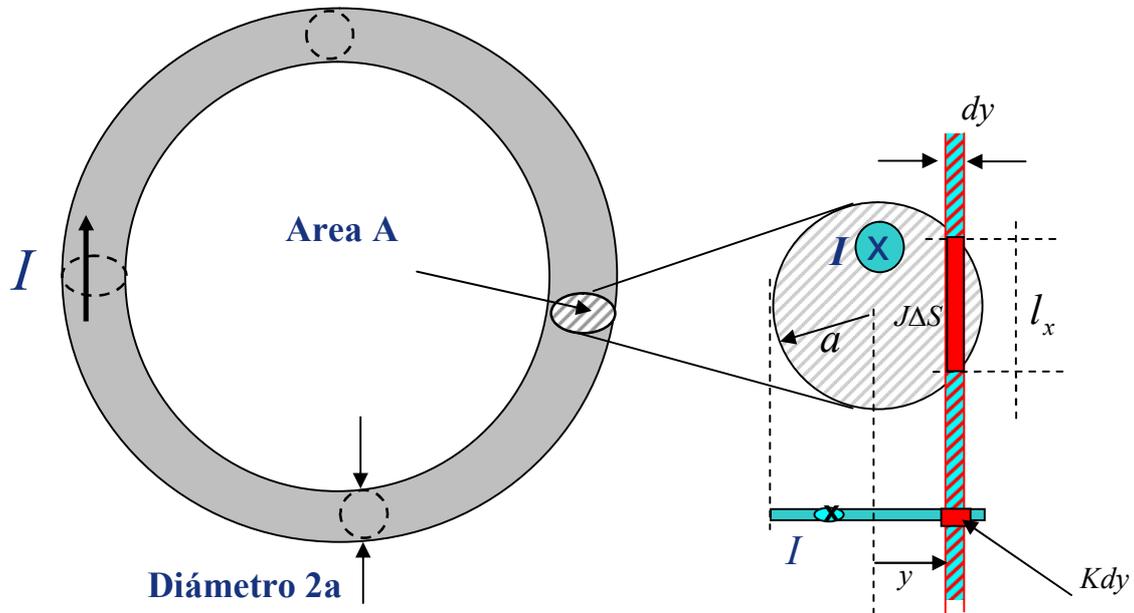


Figura 98

Si J es la densidad de corriente homogénea del toroide ($J = I / \pi a^2$ A/m²) y K la densidad superficial de corriente de la cinta (A/m), entonces la condición de equivalencia impone $K dy = J \Delta S$. Desarrollando obtenemos

$$l_x = 2\sqrt{a^2 - y^2}$$

$$K dy = \frac{I}{\pi a^2} 2\sqrt{a^2 - y^2} dy$$

$$\therefore K = \frac{2I\sqrt{a^2 - y^2}}{\pi a^2}$$

Luego el vector densidad de corriente superficial es $\vec{K} = \frac{2I\sqrt{a^2 - y^2}}{\pi a^2} \hat{j}$.

Este resultado indica que la corriente no se distribuye en forma homogénea en la cinta, ya que es mayor en el centro ($y=0$) y decrece hacia los bordes, llegando a ser nula para ($y=a$). Este resultado es coherente con la intuición, ya que si miramos el toroide desde arriba (un punto perpendicular al plano de la hoja de papel), efectivamente veremos pasar más corriente en el centro y menos hacia la orilla (convéznase de este resultado!).

Propuesto. Determinar K si imponemos que la corriente se distribuya en forma homogénea en la cinta.

5.4 Ley de Ohm

En la mayoría de los materiales conductores se encuentra que al aplicar un campo eléctrico se verifica la relación

$$\vec{J} = g \vec{E} \quad (5.13)$$

donde g es en general constante y se denomina conductividad. Las unidades de g son [A/Vm]. Es común llamar Mho (o MHO) a la unidad [A/V], con ello también se usa [MHO/m] como la unidad de g .

Todos los materiales que satisfacen la relación anterior se denominan óhmicos y g puede depender de otras variables como la temperatura o la presión, pero no del campo eléctrico. Existen también materiales no óhmicos en donde g depende del campo eléctrico aplicado, pero en este curso no los estudiaremos.

Consideremos un conductor alargado de sección uniforme S por donde circula una corriente I debido a la presencia de un campo \vec{E} según se muestra en la Figura 99.

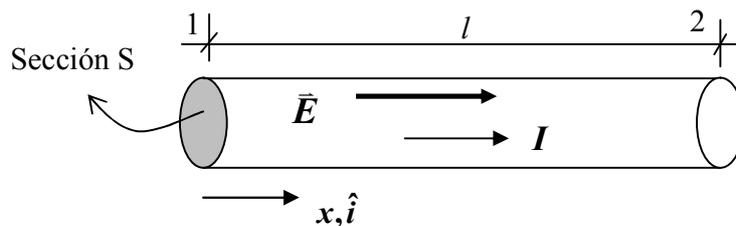


Figura 99. Ley de Ohm.

Por la ley de ohm $\vec{J} = g \vec{E}$, pero suponiendo distribución homogénea de corriente $\vec{j} = \frac{I}{S} \hat{i}$ y

$$\begin{aligned} \text{de la definición de campo } \vec{E} = -\nabla V &\Rightarrow -\int_1^2 \vec{E} \cdot dx \hat{i} = V_2 - V_1 \Rightarrow V_2 - V_1 = -E \cdot l \\ &\Rightarrow V_1 - V_2 = E \cdot l \Rightarrow \vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{l} \hat{i} \end{aligned}$$

Reemplazando valores en la ley de ohm se tiene

$$\begin{aligned} \frac{I}{S} \hat{i} &= g \times \frac{V_1 - V_2}{l} \hat{i} \\ \Rightarrow (V_1 - V_2) &= \left(\frac{l}{Sg} \right) I \end{aligned}$$

Se define $\rho = \frac{1}{g}$ (5.14) como la resistividad del material y $R = \rho \times \frac{l}{S}$ (5.15) como la

resistencia. Las dimensiones de la resistencia son [Volt/Ampere] y se llama OHM. Con esto podemos escribir

$$\Rightarrow \Delta V = RI \quad (5.16)$$

Esta es la Ley de Ohm en conductores.

También es usual definir $G = 1/R$ como la conductancia del material.

En general, mientras menor sea la resistencia de un material será un conductor más eficiente, y en el límite, si la resistencia se hace nula hablamos de un conductor perfecto donde $\Delta V = 0$. Este último caso ocurre en algunos materiales pero en condiciones de muy baja temperatura, son los llamados *superconductores*.

Para un material es posible medir su voltaje y corriente y determinar así la característica V-I, y con ello la conductividad, según se muestra en la Figura 100.

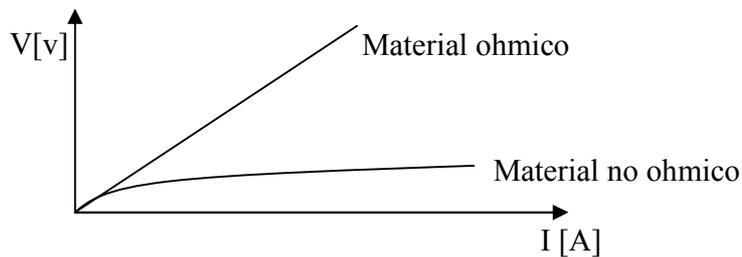


Figura 100. Característica V-I.

En la Tabla 3 se presentan valores de conductividad para diferentes materiales.

Tabla 3. Conductividad (aproximada)* de algunos materiales a 20°C

Material	Conductividad g (mhos/meter)
Conductores	
Plata	6.1×10^7
Cobre (standard)	5.8×10^7
Oro	4.1×10^7
Aluminio	3.5×10^7
Tungsteno	1.8×10^7
Zinc	1.7×10^7
Bronce	1.1×10^7
Hierro (puro)	10^7
Plomo	5×10^6
Mercurio	10^6
Carbon	5×10^4
Agua (mar)	4
Semiconductores	
Germanium (pure)	2.2
Silicon (pure)	4.4×10^{-4}
Aisladores	
Agua destilada	10^{-4}
Earth	10^{-5}
Bakelita	10^{-10}
Papel	10^{-11}
Vidrio	10^{-12}
Porcelana	10^{-12}
Mica	10^{-15}
Parafina	10^{-15}
Goma (dura)	10^{-15}
Cuarzo (fusionado)	10^{-17}
Cera	10^{-17}
(*) Estos valores pueden variar en otras Tablas ya que hay muchas variedades y aleaciones de cada material y la conductividad es además sensible a la temperatura, impurezas, etc.	

En el caso general se tienen conductores irregulares como en la Figura 101.

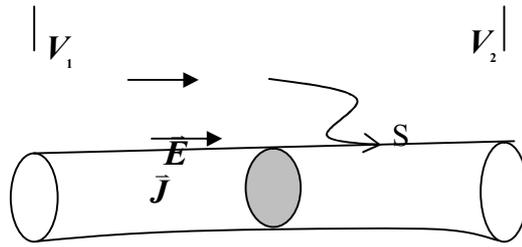


Figura 101. Corriente en conductor irregular.

Aquí la diferencia de potencial entre los extremos es $\Delta V = V_1 - V_2 = -\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$

y dado que la corriente en las caras extremas es la misma (no hay corriente que se acumule o salga por otra superficie del conductor) se puede definir la resistencia como

$$R = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_S g \vec{E} \cdot d\vec{S}} \quad (5.17)$$

donde el recorrido de la integral de línea es cualquiera y el área es cualquier sección transversal del conductor.

EJEMPLO 26

Un alambre de diámetro 1mm. y de conductividad $g = 5 \times 10^7 \text{ mho/m}$ tiene 10^{29} electrones libres por m^3 . Si se aplica un campo eléctrico de 10^{-2} V/m en la dirección axial se pide:

- la densidad de carga de electrones libres
- densidad de corriente
- corriente
- velocidad media de los electrones

Solución:

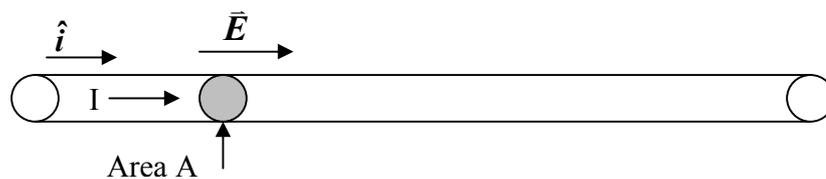


Figura 102. Conductor unifilar.

- $\rho_e = n \times e = (10^{29}) \times (-1.6 \times 10^{-19}) = -1.6 \times 10^{10} [\text{C/m}^3]$
- $\vec{J} = g \vec{E} = (5 \times 10^7) \times (10^{-2}) \hat{i} = 500000 \hat{i} [\text{A/m}^2]$
- $I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = J \cdot A = (5 \times 10^5) \times \left[\pi \left(\frac{10^{-3}}{2} \right)^2 \right] = 0.393 [\text{A}]$

$$d) J = q \times n \times v_d \Rightarrow v_d = \frac{J}{q \times n} = \frac{500000}{1.6 \times 10^{10}} \Rightarrow v_d = 3.125 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

5.5 Fuerza electromotriz

Llamaremos fuerza electromotriz FEM a un dispositivo con la propiedad de mantener una diferencia de potencial definida entre sus terminales. Esquemáticamente se muestra en la Figura 103.

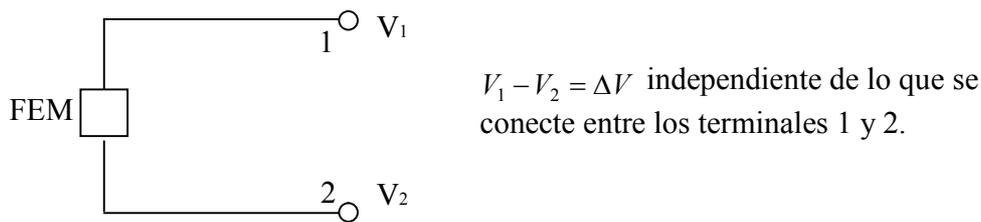


Figura 103. Fuerza electromotriz.

Una pila común, una batería de auto, un generador son ejemplos de fuerza electromotriz. Si $\Delta V > 0$ Se acostumbra a anotar como:

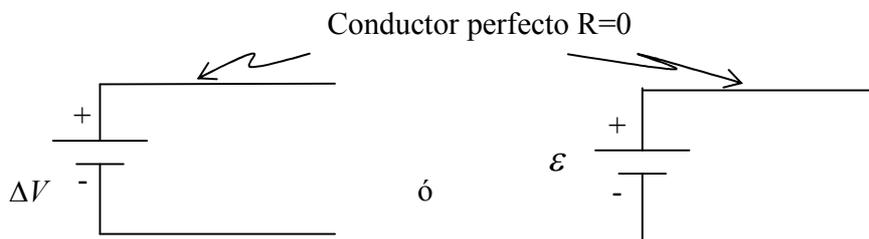


Figura 104. Notación FEM.

Recordemos que por “conductor perfecto” entenderemos un conductor con una conductividad muy grande y que por lo tanto presenta una resistencia (R) despreciable y no registra diferencia de potencial alguna. Sin embargo, en la práctica las FEM poseen una resistencia interna R_{IN} , por lo que la representación más usada es la siguiente:

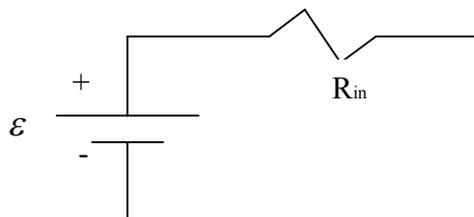


Figura 105. FEM en circuitos.

Examinemos la configuración de la Figura 106.

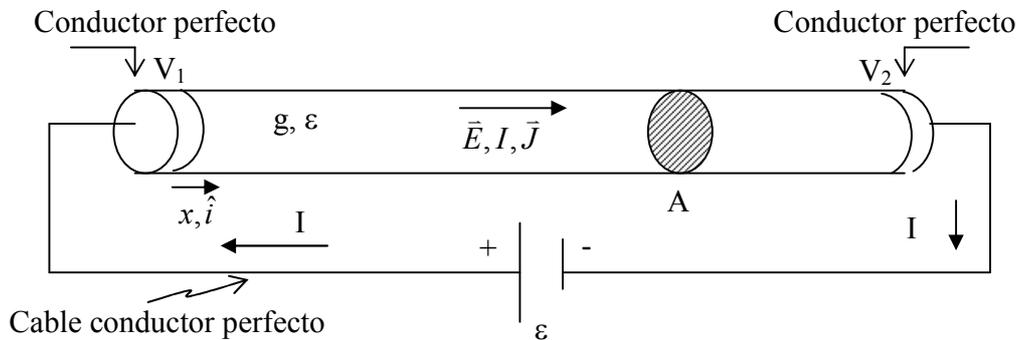


Figura 106. Conductor real.

Habíamos probado que la diferencia de potencial entre los “conductores perfectos” es

$$-\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2$$

$$El = V_1 - V_2$$

donde l es la distancia entre los conductores. Esta diferencia de potencial es exactamente el valor de la fuerza electromotriz. Luego

$$\varepsilon = V_1 - V_2$$

$$\Rightarrow \varepsilon = E \cdot l,$$

Por otra parte, la corriente que atraviesa el área A es $I = J \cdot A$. Además la densidad de corriente cumple con $J = g E$. Luego, si l es el largo del conductor de sección A , tenemos

$$\Rightarrow I = \frac{g \varepsilon}{l} A \Rightarrow \varepsilon = \frac{l}{\underbrace{g A}_R} I$$

$$\Rightarrow \varepsilon = RI$$

Esta expresión corresponde a la Ley de Ohm vista anteriormente.

La fuerza electromotriz ε realiza el trabajo de tomar cargas a un potencial y entregarlas a uno de mayor magnitud. Al circuito analizado se le representa como:

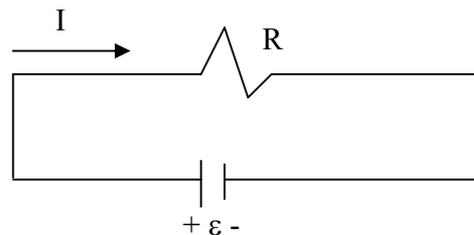


Figura 107. Convención signos.

5.6 Efecto Joule

Consideremos la configuración de la figura:

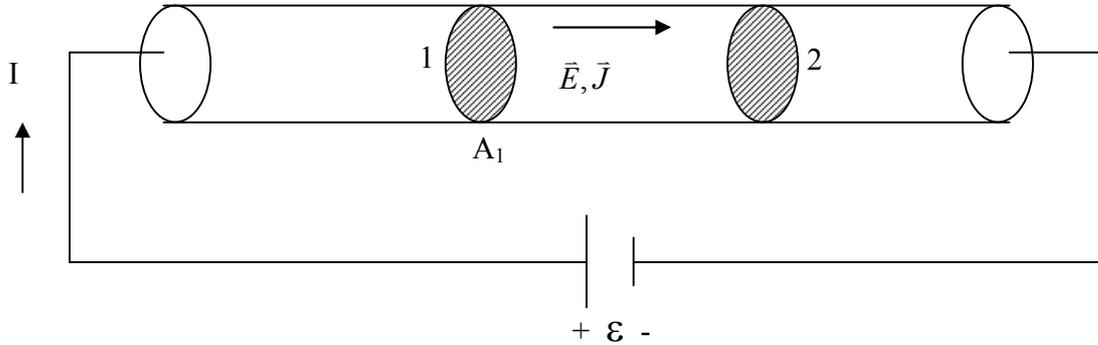


Figura 108. Efecto Joule.

La energía de la carga en el disco 1 es

$$U_1 = \Delta Q_1 \cdot V_1$$

donde ΔQ_1 es la carga que atraviesa el plano A_1 y V_1 es el potencial en 1.

Similarmente la energía en el disco 2 es $U_2 = \Delta Q_2 V_2$.

Por lo tanto la diferencia de energía es

$$\Delta U = \Delta Q_1 V_1 - \Delta Q_2 V_2$$

pero ΔQ_1 y ΔQ_2 son iguales (no hay acumulación de carga)

$$\Rightarrow \Delta U = \Delta Q (V_1 - V_2)$$

Por otra parte la potencia es el cambio de la energía en el tiempo, o sea

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} (V_1 - V_2), \quad \text{pero } \frac{\Delta Q}{\Delta t} = I$$

$$\Rightarrow P = I(V_1 - V_2)$$

y haciendo coincidir 1 con el comienzo del conductor y 2 con el fin tenemos que

$$\Rightarrow P = I\Delta V \quad (5.18)$$

es la potencia disipada en el material.

Dicha potencia se expresa en un calentamiento del material producto de las colisiones entre las partículas. Esta potencia es suministrada por la FEM.

Como $\Delta V = RI$, una expresión usual de esta potencia es:

$$P = RI^2 \quad (5.19)$$

ó

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R} \quad (5.20)$$

En general, para un material cualquiera tendremos

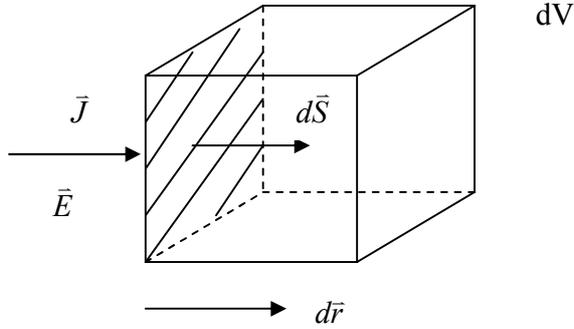


Figura 109. Energía en elemento diferencial.

La potencia disipada en el elemento de volumen es $dP = \underbrace{(\vec{J} \cdot d\vec{S})}_{\gamma} \cdot \underbrace{(\vec{E} \cdot d\vec{r})}_{dv}$ (5.21)

ó
$$dP = J \cdot E \cdot ds \cdot dr . \quad (5.22)$$

Como todos los vectores son paralelos $d\vec{S} \cdot d\vec{r} = dv$ y podemos escribir finalmente la expresión

$$\therefore P = \iiint_{\Omega} J \cdot E dv \quad (5.23)$$

la cual representa la potencia disipada en un material de volumen Ω .

5.7 Cargas en medios materiales

Resumiendo lo que hemos visto hasta aquí es lo siguiente:

- (i) Dieléctricos

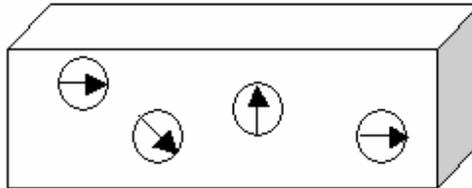


Figura 110. Cargas en dieléctricos.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$D = \epsilon E$$

Los medios se componen de dipolos que pueden girar en torno a su posición de equilibrio, pero no se desplazan.

- (ii) Conductores:

Equilibrio electrostático

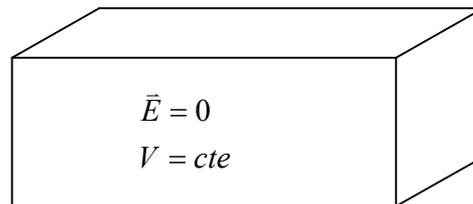


Figura 111. Conductores en equilibrio electrostático.

Sólo tiene distribución superficial. La carga al interior es nula $\rho=0$ y no hay polarización $P=0$.

Equilibrio Dinámico: corrientes

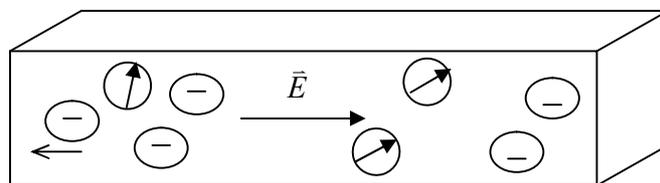


Figura 112. Conductores en equilibrio dinámico.

Electrones se desplazan con velocidad constante. Carga total por unidad de volumen es nula. También puede existir una polarización del material $P \neq 0$ (órbitas de electrones se desplazarán de su centro).

Si llamamos ρ_e a la densidad de carga de electrones por unidad de volumen y ρ_R a la densidad del resto de las cargas, se cumple

$$\iiint_{\Omega} \rho_e dV + \iiint_{\Omega} \rho_R dV = 0 \quad (5.24) \text{ en todo el volumen } \Omega.$$

Además los materiales óhmicos cumplen con $\vec{J} = g \vec{E}$.

Así, en general un medio material puede presentar características de dieléctricos (ϵ), o sea aisladores, o conductores (g) como se muestra en la Figura 113.

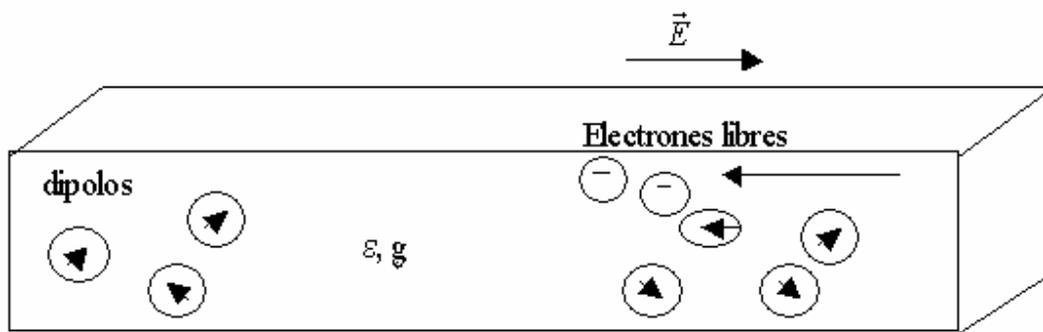


Figura 113. Cargas en materiales reales.

Si $g \rightarrow \infty \Rightarrow$ conductor perfecto

Si $\epsilon \rightarrow \infty \Rightarrow$ aislante perfecto

Ambas características son contrarias, es decir, si es un buen aislante tendrá pocas cargas libres y será por lo tanto un conductor pobre, y viceversa.

5.8 Corriente de Convección

La corriente de convección se produce cuando se tiene una masa con carga en desplazamiento, por ejemplo un líquido con carga fluyendo por una cañería. Consideremos que esto ocurre en la Figura 114, con una masa eléctricamente cargada que se desplaza con velocidad v_c .

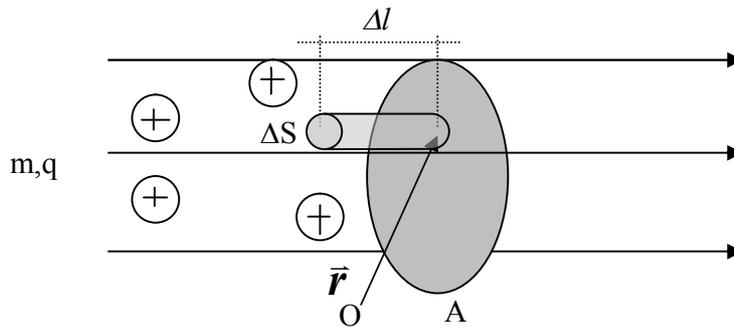


Figura 114. Corriente de convección.

Si la masa contenida en el cilindro elemental tiene velocidad v_c , y si designamos por ρ_c la densidad de carga en dicho volumen, entonces la cantidad de carga contenida en el volumen $\Delta S \times \Delta l$ es $\rho_c \times (\Delta S \times \Delta l)$. Por lo tanto, la corriente atravesando al área ΔS en un intervalo Δt es

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_c \Delta S \times \Delta l}{\Delta t} = \rho_c \Delta S \frac{\Delta l}{\Delta t}, \quad (5.25)$$

pero $v_c = \frac{\Delta l}{\Delta t} \Rightarrow \Delta I = \rho_c \Delta S v_c$ (5.26)

Luego el vector densidad de corriente es

$$\vec{J}(\vec{r}) = \rho_c v_c \hat{u}, \quad (5.26)$$

donde \hat{u} es el vector unitario en la dirección de desplazamiento de la masa cargada.

Se cumple

$$I = \iint_A \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (5.27)$$

Donde I es la corriente total que atraviesa el área A (la cual desde luego no se mueve).

Conviene precisar que en las corrientes de convección NO tiene sentido la ley de ohm, es decir, no se cumple la relación $\vec{J} = \sigma \vec{E}$.

EJEMPLO 27

El sistema de la figura 115 representa una cinta transportadora de un polvo cargado que puede modelarse como una densidad superficial de carga $\sigma = 10^{-2} \text{ C/m}^2$. La cinta tiene un ancho de 1m se mueve a una velocidad de 2 m/s. Se pide:

- calcular la corriente que atraviesa el área A
- ¿cuánta carga ha pasado en 5 segundos?

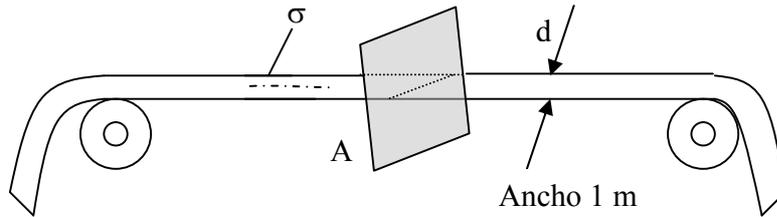


Figura 115. Cinta transportadora de carga.

Solución:

$$\text{a) } I = \frac{\sigma \times d \times \Delta l}{\Delta t} = \sigma dv_c = 10^{-2} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right] \times 1 [\text{m}] \times 2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$I = 2 \times 10^{-2} [\text{C/S}] = 20 \text{ mA}$$

$$\text{b) } \Delta Q = I \times \Delta t = 2 \times 10^{-2} [\text{C/S}] \times 5 [\text{S}] = 10^{-1} [\text{C}]$$

La corriente de convección tiene gran importancia en el entendimiento de los seres vivos. Por ejemplo el intercambio de sustancias entre células se puede explicar mediante un modelo eléctrico en base a corriente de convección de proteínas.

5.9 Ecuación de Continuidad

Consideremos un volumen Ω del espacio en el cual se tiene un flujo neto de corriente saliendo del volumen.

$$I_{salida} = \oiint_{S(\Omega)} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (5.28)$$

aquí $d\vec{S} = dS\hat{n}$ apunta hacia afuera del volumen Ω .

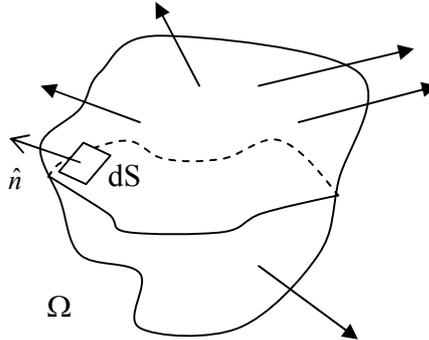


Figura 116. Continuidad de carga eléctrica.

Si llamamos Q_{in} a la carga contenida en el volumen Ω , entonces se debe cumplir

$$I_{salida} = -\frac{dQ_{in}}{dt} \quad (5.29)$$

O sea, la corriente que sale corresponde a la variación de carga encerrada en el volumen. Supongamos que Q_{in} se describe a través de una densidad de carga libre ρ_{Ω}^1 .

Luego:

$$Q_{in} = \iiint_{\Omega} \rho_{\Omega}(\vec{r}) dV \quad (5.30)$$

$$I_{salida} = -\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho_{\Omega}(\vec{r}) dV \quad (5.31)$$

Dado que el volumen Ω es fijo (no depende de t) podemos escribir:

$$I_{salida} = -\iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\Omega}(\vec{r}) \right] dV \quad (5.32)$$

y reemplazando en la expresión original tenemos:

$$-\iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\Omega}(\vec{r}) \right] dV = \oiint_{S(\Omega)} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (5.33)$$

Aplicando el teorema de la divergencia al lado derecho

$$-\iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\Omega}(\vec{r}) \right] dV = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{J} dV \quad (5.34)$$

Como se cumple \forall espacio Ω (contenga este un medio material o no)

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\Omega}(\vec{r}) = 0 \quad (5.35) \quad \text{Ecuación de continuidad.}$$

La carga no aparece ni desaparece espontáneamente, sino que se conserva.

¹ Notar que la carga de polarización no se desplaza, ya que sólo gira en torno a la posición de equilibrio.

5.10 Ecuación de Continuidad en Medios Materiales

Consideremos un medio material que posee tanto características dieléctricas (ϵ) como conductoras (g). Supongamos que en $t=0$ se inyecta instantáneamente una densidad de carga $\rho_0(r)$ en el material. Determinaremos la variación que experimenta la carga para $t>0$.

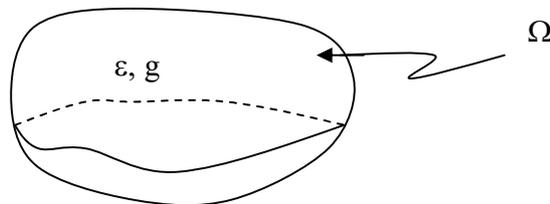


Figura 117. Ecuación de continuidad en medios materiales.

Tenemos

$$\vec{J} = g \vec{E} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = g \nabla \cdot \vec{E}, \text{ donde hemos supuesto } g \text{ constante.}$$

Pero

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \frac{g}{\epsilon} \nabla \cdot \vec{D} = \frac{g}{\epsilon} \rho(t), \text{ y reemplazando en la ecuación de continuidad}$$

obtenemos

$$\frac{g}{\epsilon} \rho(t) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho(t) = \rho_0 e^{-t/T_r} \quad (5.36)$$

donde $T_r = \epsilon/g$ (5.37) es la constante de relajación y mide la rapidez con que la carga en volumen emigra hacia la superficie. Así, en régimen estacionario no hay carga en volumen y sólo hay carga superficial.

EJEMPLO 28

Considere un medio material que forma una esfera de radio R , el cual tiene características dieléctricas ϵ y conductividad g , según se muestra en la Figura 118. En $t=0$ se carga dicha esfera con una carga Q_0 uniformemente distribuida.

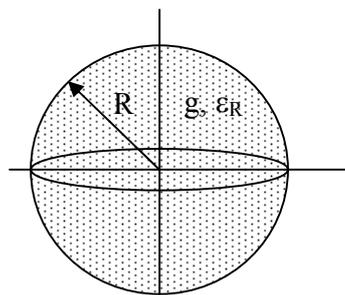


Figura 118. Carga en función del tiempo.

Se pide:

- a) Determine la ecuación que rige la carga en la esfera para $t \geq 0$,
- b) Evalúe el tiempo que toma la carga en volumen en disminuir 36.8% de su valor inicial,

c) Cuánto vale el tiempo calculado en b) para los siguientes materiales:

	g	ϵ_R
Cobre	5.8×10^7	1
Cuarzo fusionado	10^{-17}	5

Solⁿ

a) la ecuación que rige la carga es:

$$\frac{g}{\epsilon} \rho(t) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0$$

Integrando en el volumen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iiint_V \left(\frac{g}{\epsilon} \rho(t) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \right) dV &= 0 \\ \Rightarrow \frac{g}{\epsilon} \underbrace{\iiint_V \rho(t) dV}_{Q(t)} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\iiint_V \rho(t) dV}_{Q(t)} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{g}{\epsilon} Q(t) + \frac{\partial Q(t)}{\partial t} &= 0 \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-t/T_R} \end{aligned}$$

Para $t=0$ $Q_0 = \rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3$ y $T_R = \frac{\epsilon}{g}$

b) $0.368 Q_0 = Q_0 e^{-t/T_R} \Rightarrow t = T_R$

c)

	cobre	Cuarzo fusionado
T_R	$1.53 \times 10^{-19} \text{ seg}$	51.2 días

5.11 Condiciones de Borde para \vec{J}

Consideremos la interfaz de dos medios materiales como en la Figura 119. A ambos lados hay campos y densidades de corriente.

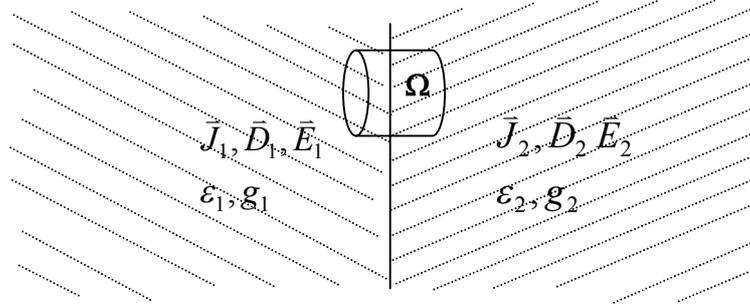


Figura 119. Condiciones de borde.

De las condiciones de borde para dieléctricos teníamos que la componente tangencial del campo eléctrico se mantiene (aquí sigue cumpliéndose $\nabla \times \vec{E} = 0$) y que la diferencia de la componente normal del vector desplazamiento es igual a la densidad de carga superficial (sigue cumpliéndose la primera ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$). Por lo tanto

$$\begin{aligned} E_{1t} = E_{2t} &\Rightarrow \frac{J_{1t}}{g_1} = \frac{J_{2t}}{g_2} \\ D_{1N} - D_{2N} &= \sigma_{libre} \\ \Rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_l &\Rightarrow \varepsilon_1 \frac{J_{1n}}{g_1} - \varepsilon_2 \frac{J_{2n}}{g_2} = \sigma_l \end{aligned} \quad (5.38)$$

Por otra parte, también usaremos la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ para obtener condiciones sobre J . Tendremos dos casos interesantes.

- I. Situación Estacionaria $\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0$. Cuando no existe variación de carga en la interfaz se cumple $\nabla \cdot \vec{J} = 0$. Si tomamos un volumen como el del cilindro de la Figura 118 obtenemos (se procede en forma similar a la usada para derivar la continuidad de la componente normal del vector \vec{D})

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (5.39)$$

Aquí claramente habrá una carga acumulada en la interfaz ya que las condiciones (5.38) deben cumplirse. Así, al reemplazar la componente normal de \vec{J} en (5.38) se tiene

$$J_{1n} = \sigma_l \left(\frac{\varepsilon_1}{g_1} + \frac{\varepsilon_2}{g_2} \right)^{-1} \quad y \quad J_{2n} = \sigma_l \left(\frac{\varepsilon_1}{g_1} + \frac{\varepsilon_2}{g_2} \right)^{-1} \quad (5.39)$$

Cuando se cumple esta condición de borde diremos que el sistema está en estado estacionario o en régimen permanente, la cual es equivalente a suponer $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

II. Situación Transitoria. Cuando hay variación de carga tenemos que $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$. Haremos uso ahora de la ecuación de continuidad en el volumen Ω indicado en la Figura 106.

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ ó en su versión integral } \oiint_{S(\Omega)} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

Aquí Q es la carga en Ω y haciendo tender el largo del cilindro a cero

$$\Rightarrow \oiint_{S(\Omega)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = J_{2n} \Delta S - J_{1n} \Delta S \quad (5.40)$$

y $\frac{\partial Q}{\partial t}$ solo se concentra en la interfaz, luego

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\sigma \cdot \Delta S) \quad (5.41) \\ \Rightarrow J_{2n} \Delta S - J_{1n} \Delta S + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Delta S &= 0 \\ \Rightarrow J_{2n} - J_{1n} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Esta es la condición que deben satisfacer las componentes normales del vector densidad de corriente de ambos medios. Esta situación se llama transitoria o transiente.

Caso en que uno de los medios es un conductor perfecto.

Consideremos la interfaz entre un medio material y un conductor puro tal como se muestra en la Figura 120.



Figura 120. Dieléctrico y conductor perfectos.

Al tomar la superficie Gaussiana S, se tiene

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_{2n} \Delta S - D_{1n} \Delta S = \sigma \Delta S \quad (5.42)$$

Al interior del conductor perfecto el vector polarización es nulo. Luego, los campos cumplen

$$\epsilon_0 E_2 - \epsilon E_1 = \sigma \quad (5.43)$$

Las condiciones de borde para el vector J en este caso son las mismas que desarrollamos anteriormente.

EJEMPLO 29

Considere el sistema de la Figura 121. Se pide:

- Calcular \vec{J} , \vec{E} y \vec{D} entre las placas conductoras en la condición de equilibrio.
- Idem pero en la situación transitoria.

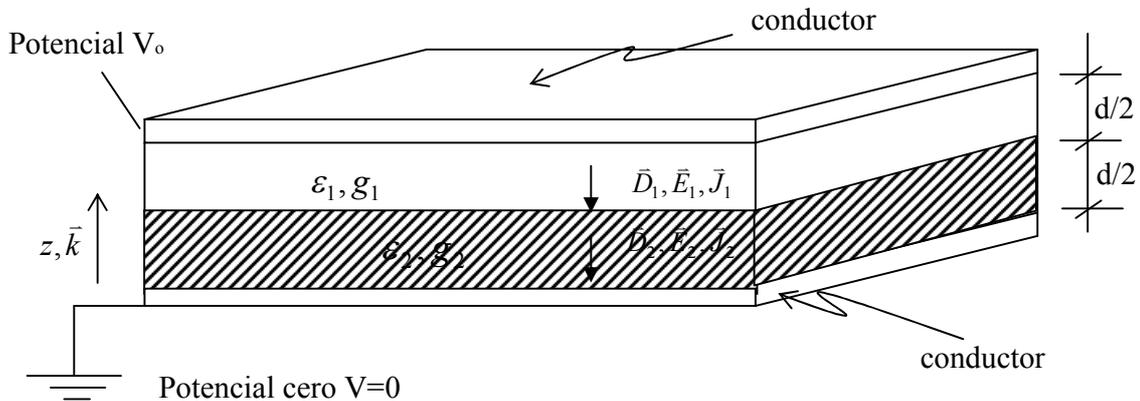


Figura 122. Condensador compuesto sin acumulación de carga.

Sol.

- Supondremos que campos y densidades de corrientes tienen dirección según z . Dado que estamos en la condición de equilibrio, no hay variación en la carga superficial σ entre los dos medios, es decir, se cumple $\frac{\partial(\sigma\Delta S)}{\partial t} = 0$ en la interfaz y por lo tanto de la ecuación de continuidad $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$ en régimen permanente. Según vimos esto conduce a la condición

$$\Rightarrow J_{2n} = J_{1n}$$

Para los campos eléctricos supondremos $\vec{E}_i = E_i(-\hat{k})$, con E_i constante para ambos medios. De la Ley de Ohm se tiene

$$\vec{J}_1 = g_1 \vec{E}_1 \quad \text{y} \quad \vec{J}_2 = g_2 \vec{E}_2 \quad ,$$

Por lo tanto,

$$g_1 \vec{E}_1 = g_2 \vec{E}_2 \quad (5.44)$$

Por otro lado, sabemos que la relación entre el voltaje y el campo eléctrico entre dos puntos (1,2) cualquiera es

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

y haciendo coincidir 1 con el potencial cero y 2 con el potencial V_0 tenemos

$$\Rightarrow V_0 = - \left\{ \int_0^{d/2} E_2(-\hat{k}) \cdot dz\hat{k} + \int_{d/2}^d E_1(-\hat{k}) \cdot dz\hat{k} \right\}$$

$$V_0 = E_2 \frac{d}{2} + E_1 \frac{d}{2} \Rightarrow \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = - \frac{2V_0}{d} \hat{k}$$

Usando la condición (5.44) obtenemos

$$\frac{g_2}{g_1} \bar{E}_2 + \bar{E}_2 = -\frac{2V_0}{d} \hat{k}$$

$$\Rightarrow \bar{E}_2 = -\frac{2g_1 V_0}{d(g_1 + g_2)} \hat{k} \quad y \quad \bar{E}_1 = -\frac{2g_2 V_0}{d(g_1 + g_2)} \hat{k}$$

Luego las densidades de corriente son

$$\bar{J}_2 = -\frac{2g_1 g_2 V_0}{d(g_1 + g_2)} \hat{k} \quad y \quad \bar{J}_1 = -\frac{2g_1 g_2 V_0}{d(g_1 + g_2)} \hat{k}$$

Claramente se cumple la continuidad de la componente normal del vector densidad de corriente en la interfaz. Para los vectores desplazamiento tenemos

$$\bar{D}_2 = -\frac{2\varepsilon_2 g_1 V_0}{d(g_1 + g_2)} \hat{k} \quad y \quad \bar{D}_1 = -\frac{2\varepsilon_1 g_2 V_0}{d(g_1 + g_2)} \hat{k}$$

Por lo tanto existirá una distribución de carga σ entre los dos medios materiales dada por la condición

$$D_2 - D_1 = \sigma, \quad \text{donde usamos la notación } \bar{D}_i = D_i(-\hat{k}).$$

Luego,

$$\sigma = \frac{2V_0(\varepsilon_2 g_1 - \varepsilon_1 g_2)}{d(g_1 + g_2)}$$

Es importante notar además que habrá una densidad de carga en la cara interior de los conductores (interfaz entre conductor puro y medio material). Si llamamos σ_1 y σ_2 a las densidades en la placa superior e inferior, sus expresiones son

$$\bar{D}_1 \cdot (-\hat{k}) = \sigma_1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \frac{2\varepsilon_1 g_2 V_0}{d(g_1 + g_2)}$$

$$\bar{D}_2 \cdot \hat{k} = \sigma_2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = -\frac{2\varepsilon_2 g_1 V_0}{d(g_1 + g_2)}$$

- b) Consideramos ahora el período transiente para la distribución de carga σ en la interfaz. Usamos la misma notación anterior $\bar{D}_i = -D_i \cdot \hat{k}$, $\bar{E}_i = -E_i \cdot \hat{k}$. Donde los campos tienen la dirección de la Figura 123.

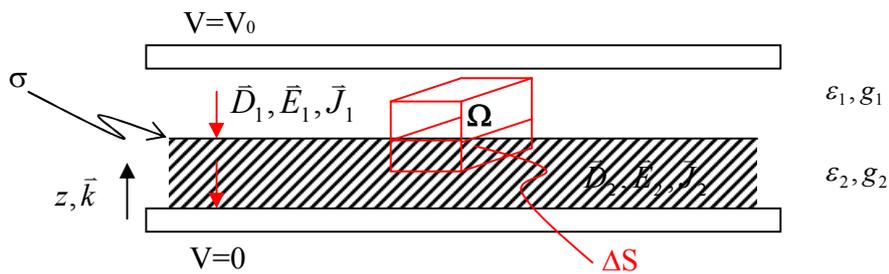


Figura 123. Condensador compuesto con acumulación de carga.

Según vimos la ecuación de continuidad en el régimen transitorio conduce a la condición de borde

$$J_2 - J_1 + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

Por otra parte, de las condiciones de borde para el vector desplazamiento

$$\begin{aligned} D_2 - D_1 &= \sigma \\ \Rightarrow \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 &= \sigma \end{aligned} \quad (5.45)$$

Además sabemos que

$$\begin{aligned} V_0 - 0 &= -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_0^{d/2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{d/2}^d \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} \\ V_0 &= -\int_0^{d/2} (-E_1 \hat{k}) \cdot dz \hat{k} - \int_{d/2}^d (-E_2 \hat{k}) \cdot dz \hat{k} \\ V_0 &= E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} \Rightarrow E_1 + E_2 = \frac{2V_0}{d} \end{aligned} \quad (5.46)$$

De (5.45) y (5.46) tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= \frac{2V_0}{d} \\ -\varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_2 E_2 &= \sigma \\ \varepsilon_1 \times (5.45) + (5.46) &\Rightarrow \varepsilon_1 E_2 + \varepsilon_2 E_2 = \frac{2V_0}{d} \varepsilon_1 + \sigma \\ \Rightarrow E_2 &= \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0}{d} \varepsilon_1 + \sigma \right) \\ \varepsilon_2 \times (5.45) - (5.46) &\Rightarrow \varepsilon_2 E_1 + \varepsilon_1 E_1 = \frac{2V_0 \varepsilon_2}{d} - \sigma \\ \Rightarrow E_1 &= \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0 \varepsilon_2}{d} - \sigma \right) \\ \therefore \vec{E}_1 &= -\frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0 \varepsilon_2}{d} - \sigma \right) \hat{k} \Rightarrow \vec{D}_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0 \varepsilon_2}{d} - \sigma \right) \hat{k} \\ \vec{E}_2 &= -\frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0 \varepsilon_1}{d} + \sigma \right) \hat{k} \Rightarrow \vec{D}_2 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0 \varepsilon_1}{d} + \sigma \right) \hat{k} \end{aligned}$$

Luego las densidades de corriente son:

$$\begin{aligned} \vec{J}_1 &= -\frac{g_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0 \varepsilon_2}{d} - \sigma \right) \hat{k} = -J_1 \hat{k} \\ \vec{J}_2 &= -\frac{g_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0 \varepsilon_1}{d} + \sigma \right) \hat{k} = -J_2 \hat{k} \end{aligned}$$

Tomando la diferencia

$$\begin{aligned} J_2 - J_1 &= \frac{g_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0 \varepsilon_1}{d} + \sigma \right) - \frac{g_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0 \varepsilon_2}{d} - \sigma \right) \\ J_2 - J_1 &= \frac{g_2 2V_0 \varepsilon_1}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} - \frac{g_1 2V_0 \varepsilon_2}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + \sigma \frac{(g_1 + g_2)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \\ \therefore J_2 - J_1 &= \alpha + \beta \sigma \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de continuidad $\Rightarrow \alpha + \beta\sigma + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$

Solución Homogénea $\sigma(t) = ke^{-\beta t}$

Solución Particular $\sigma = -\frac{\alpha}{\beta}$

$$\Rightarrow \sigma(t) = ke^{-\beta t} - \frac{\alpha}{\beta}$$

C.I. $\sigma(t=0) = 0 \Rightarrow k = \frac{\alpha}{\beta}$

$$\therefore \sigma(t) = \frac{\alpha}{\beta}(e^{-\beta t} - 1)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{2V_0(g_2\varepsilon_1 - g_1\varepsilon_2)}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}}{\frac{g_1 + g_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} = \frac{2V_0(g_2\varepsilon_1 - g_1\varepsilon_2)}{d(g_1 + g_2)}$$

$$\therefore \sigma(t) = \frac{2V_0(g_2\varepsilon_1 - g_1\varepsilon_2)}{d(g_1 + g_2)} \left[e^{-\frac{g_1 + g_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} t} - 1 \right]$$

Notar que para $t \rightarrow \infty$

$$\sigma(t \rightarrow \infty) = \sigma_\infty = \frac{2V_0(g_1\varepsilon_2 - g_2\varepsilon_1)}{d(g_1 + g_2)}$$

que es el resultado obtenido en la parte a).

5.12 Ley de Voltajes de Kirchoff

Consideremos un sistema de conductores como el de la Figura 124.

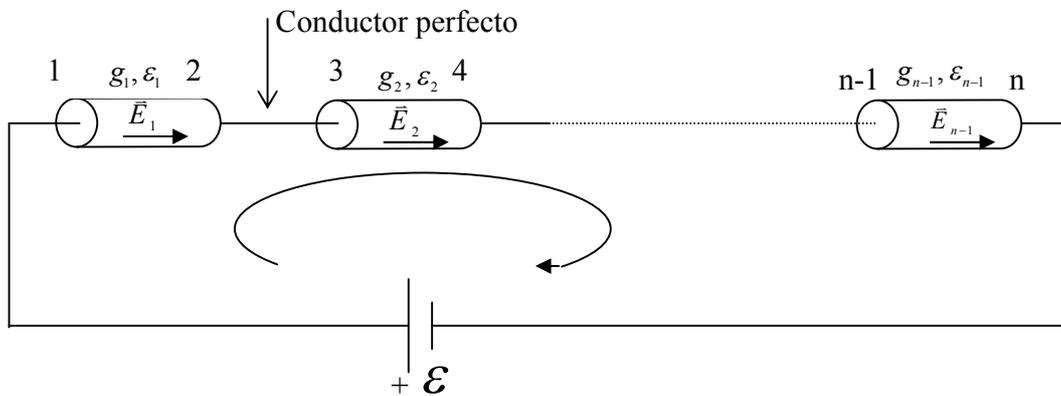


Figura 124. Ley de voltajes de Kirchoff.

La diferencia de potencial entre 1 y n es

$$\Delta V = \int_1^2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + \int_{n-1}^n \vec{E}_{n-1} \cdot d\vec{l} \quad (5.47)$$

$$\Delta V = \sum E_i l_i = (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) + \dots + (V_{n-1} - V_n) \quad (5.48)$$

Pero $\Delta V = \varepsilon$

$$\Rightarrow \sum \Delta V_i - \varepsilon = 0 \quad (5.49)$$

∴ La suma neta de las diferencias de potencial en un loop cerrado es nula. Esto se conoce como “Ley de voltajes de Kirchoff”

EJEMPLO 30

Encontrar el voltaje en el condensador de la figura 125 si este se encuentra inicialmente descargado.

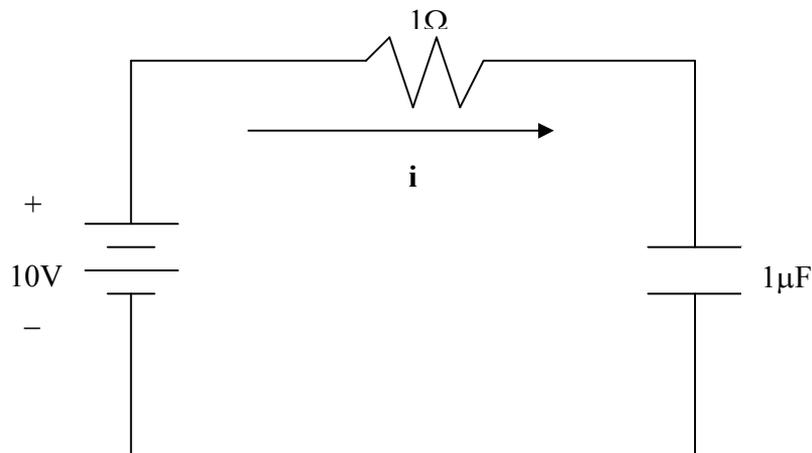


Figura 125. Circuito RC serie.

Sol:

Aplicando ley de voltajes de Kirchoff:

$$10V = V_R + V_C$$

$$10 = 1i + V_C$$

$$\text{pero } i = i_C = C \frac{dV_C}{dt}$$

$$\Rightarrow 10 = C \frac{dV_C}{dt} + V_C$$

$$10 = 10^{-6} \frac{dV_C}{dt} + V_C \quad \text{Ecuación diferencial ordinaria}$$

Resolvemos la solución particular y luego la homogénea.

Solución homogénea:

$$\Rightarrow 10^{-6} \frac{dV_{Ch}}{dt} + V_{Ch} = 0$$

$$\Rightarrow V_{Ch} = ke^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = 10^{-6}$$

Solución particular:

$$\Rightarrow \frac{dV_{Cp}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow V_{Cp} = 10$$

Solución completa:

$$V_C = V_{Cp} + V_{Ch}$$

$$V_C = 10 + ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

Aplicando la condición inicial:

$$V_C(t=0) = 0 \Rightarrow k = -10$$

finalmente

$$\boxed{V_C(t) = 10(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})V}$$

Notar que para $t \rightarrow \infty$ $V(t) = 10V \Rightarrow$ no hay corriente en el circuito.

5.13 Ley de Corrientes de Kirchoff.

Consideremos ahora un sistema de conductores que convergen a un mismo espacio Ω según se muestra en la Figura 126.

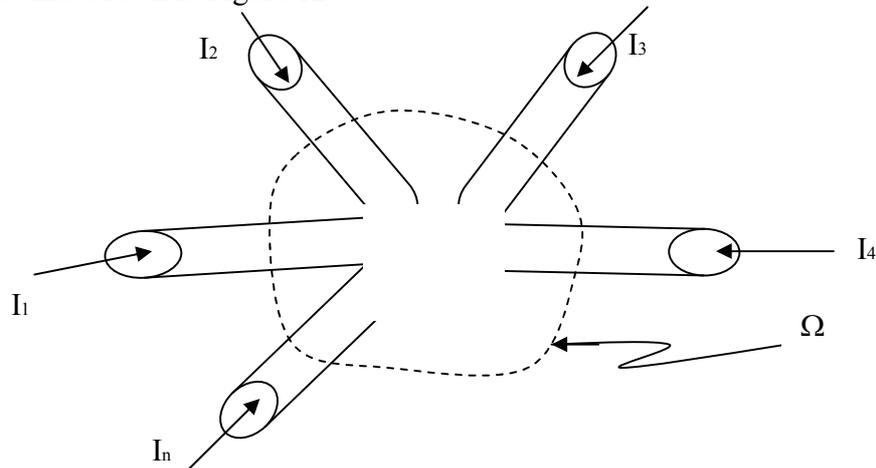


Figura 126. Ley de corrientes de Kirchoff.

Si no existe acumulación de carga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (5.50)$$

Tomando el volumen Ω que contiene a todos los conductores convergentes

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{J} dV = 0 \quad (5.51)$$

y aplicando el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned} \iint_{S(\Omega)} \vec{J} \cdot d\vec{S} &= \\ \iint_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \dots + \iint_{S_n} \vec{J}_n \cdot d\vec{S}_n &= 0 \\ \therefore I_1 + I_2 + \dots + I_n &= 0 \quad (5.52) \end{aligned}$$

Si no hay acumulación de carga la suma neta de corrientes que convergen a un espacio cerrado es nula. Esta es la “Ley de corrientes de Kirchoff”.

EJEMPLO 31

Calcular la corriente I de la figura 127 si el condensador se encuentra inicialmente descargado.

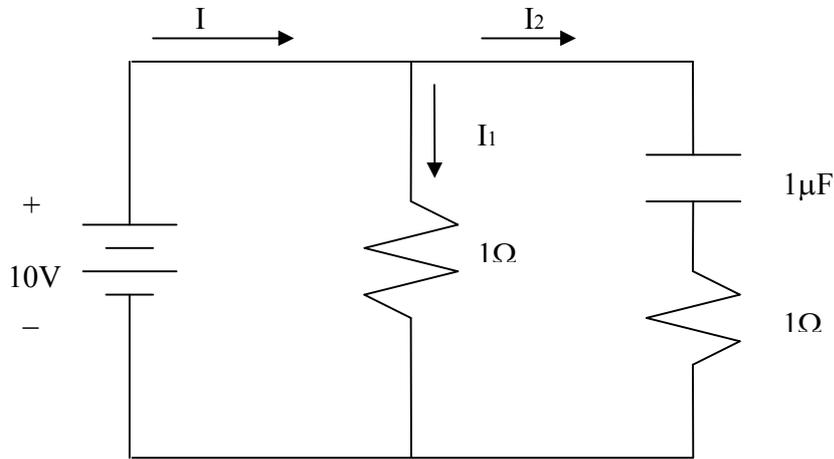


Figura 127. Circuito RC paralelo.

Solución:

De la ley de corrientes de Kirchoff obtenemos que $I = I_1 + I_2$

De las ecuaciones del condensador sabemos que $I_2 = C \frac{dV_C}{dt}$

De aplicar ley de voltajes de Kirchoff y ley de Ohm se obtiene

$$I_1 = \frac{V_{R1}}{R} = \frac{10V}{1\Omega} = 10[A]$$

$$I_2 = \frac{V_{R2}}{R} = \frac{10 - V_C}{1}$$

Igualando las dos expresiones encontradas para la corriente I_2 llegamos a la siguiente ecuación diferencial:

$$10^{-6} \frac{dV_C}{dt} = 10 - V_C$$

En el ejemplo 30 resolvimos la misma ecuación diferencial con la misma condición inicial, llegando al resultado que se muestra a continuación:

$$V_C(t) = 10(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})V \quad \text{con } \tau = 10^{-6}$$

$$\Rightarrow I_2 = 10^{-6} \frac{d10(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt}$$

$$\Rightarrow I_2 = 10^{-6} \left(10 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$\Rightarrow I_2 = 10e^{-\frac{t}{\tau}} [A]$$

Finalmente

$$I = I_1 + I_2$$

$$I(t) = 10 \left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) [A]$$

Notar que para $t \rightarrow \infty$ $I(t) = 10A \Rightarrow$ solo hay corriente en la resistencia R_1 , es decir, no hay corriente en el condensador.

5.14 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1:

Considere el circuito de la Figura .

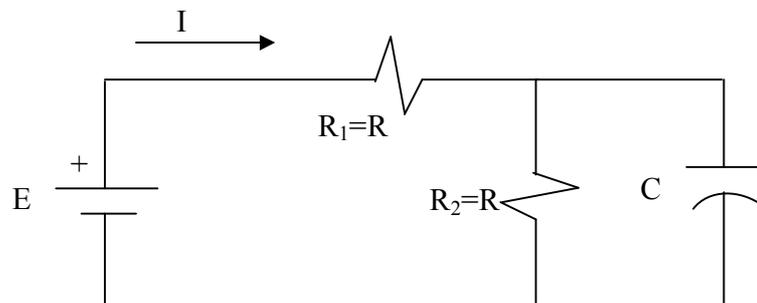


Figura P.5.1.1

Se pide:

- Determinar la corriente I en función del tiempo si en $t = 0$ la carga del condensador es nula (voltaje nulo).
- Calcular la corriente para la condición estacionaria (t infinito).

Solución:

- Por la ley de corrientes de Kirchoff:

$$I = I_{R1} = I_{R2} + I_C$$

$$I_{R2} = \frac{V_{R2}}{R}$$

$$I_C = C \frac{dV_C}{dt}$$

Pero por ley de voltajes de Kirchoff $V_{R2} = V_C$

$$\Rightarrow I = \frac{V_C}{R} + C \frac{dV_C}{dt}$$

Utilizando nuevamente la ley de voltajes de Kirchoff y la ley de Ohm

$$V_{R1} = E - V_C$$

$$\Rightarrow I = I_{R1} = \frac{E - V_C}{R}$$

Entonces formamos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{E - V_C}{R} = \frac{V_C}{R} + C \frac{dV_C}{dt}$$

$$RC \frac{dV_C}{dt} + 2V_C = E$$

Para resolver esta ecuación debemos encontrar la solución particular y la homogénea.

Solución homogénea:

$$\Rightarrow 0 = 2V_C + RC \frac{dV_C}{dt}$$

$$V_{Ch}(t) = ke^{-\frac{2}{RC}t}$$

Solución particular:

$$\Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = 0$$

$$2V_C = E$$

$$V_{Cp} = \frac{E}{2}$$

Luego

$$V_C(t) = \frac{E}{2} + ke^{-\frac{2}{RC}t}$$

Aplicando condición inicial:

$$V_C(0) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{E}{2} + k$$

$$\Rightarrow k = -\frac{E}{2}$$

$$\Rightarrow V_C(t) = \frac{E}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{RC}t} \right)$$

Pero lo que buscamos es la corriente I, la que estaba dada por $I = \frac{E - V_C}{R}$

$$\Rightarrow I = \frac{E}{R} \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{RC}t} \right) \right)$$

$$\boxed{I(t) = \frac{E}{2R} \left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}} \right)}$$

b)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{E}{2R}$$

Resulta intuitivo este resultado, pues el condensador durante el régimen transitorio se carga no conduciendo una vez cargado. Correspondiendo entonces la corriente I en régimen permanente a la corriente del circuito sin el condensador.

PROBLEMA 2

Se tiene un par de electrodos de placas planas paralelas entre las cuales se aplica una diferencia de potencia V_0 . En el interior se coloca un dieléctrico perfecto junto con dos secciones de dieléctrico con pérdidas. Para este problema se pide determinar:

a) La distribución de campo eléctrico en todo el sistema. (desprecie efectos de borde)

- b) La capacidad equivalente C del sistema de electrodos.
 c) La conductancia equivalente G del sistema de electrodos.
 d) La densidades de cargas en las interfaces del sistema.

Hint: la energía eléctrica $w = \frac{\epsilon}{2} \int \frac{V_0^2}{d^2} dv$ y $w_{condensador} = \frac{1}{2} CV_0^2$

Considerar profundidad unitaria

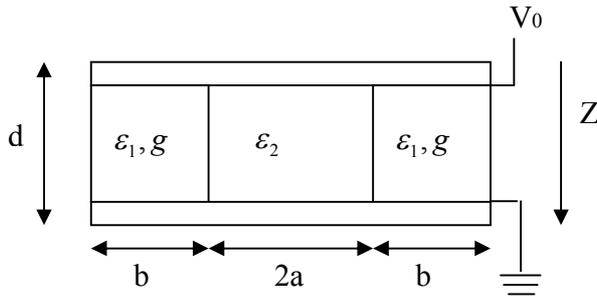


Figura P.5.2.1

Solución:

- a) Los campos $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ están los tres en la dirección Z y con el sentido de este mismo vector (van de mayor a menor voltaje). Como estos tres campos son tangenciales a las interfaces del medio, se tienen que $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{3t}$ (condiciones de borde) $\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}_3 = \vec{E}$

Habíamos visto que:

$$\Delta V = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow E = \frac{V_0}{d} \text{ (entre las placas)}$$

Luego: $\vec{E} = \frac{V_0}{d} \hat{z}$

Fuera de las placas el campo es nulo, pues la carga encerrada será cero.

b) $w_e = w_1 + w_2 + w_3$ como $w_1 = w_3 \Rightarrow w_e = 2w_1 + w_2$

$$\Rightarrow w_1 = \frac{\epsilon_1}{2} \int E^2 dv = \frac{\epsilon_1}{2} \int \frac{V_0^2}{d^2} dv = \frac{\epsilon_1}{2} \frac{V_0^2}{d^2} b \cdot d \cdot 1$$

$$w_2 = \frac{\epsilon_2}{2} \int \frac{V_0^2}{d^2} dv = \frac{\epsilon_2}{2} \frac{V_0^2}{d^2} 2a \cdot d \cdot 1$$

luego

$$w_e = \frac{V_0^2}{d} (a\epsilon_2 + b\epsilon_1)$$

Sólo nos queda igual a la energía eléctrica del condensador

$$\Rightarrow \frac{1}{2} CV_0^2 = \frac{V_0^2}{d} (a\epsilon_2 + b\epsilon_1)$$

$$\Rightarrow C = \frac{2}{d} (a\epsilon_2 + b\epsilon_1)$$

$$c) \vec{J}_1 = g\vec{E}_1 = \frac{gV_0}{d}\hat{z}$$

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow I = 2 \iint_A \vec{J}_1 \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow I = \frac{2gb \cdot 1}{d} V_0 \quad \text{pero} \quad I = GV \quad (\text{ley de ohm } G = 1/R)$$

$$\Rightarrow G = \frac{2gb}{d}$$

d) Sabiendo que $\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n} = \rho_s$ pero el campo solo tiene componente tangencial por lo tanto no hay densidad de carga en las interfaces.

PROBLEMA 3

Un conjunto de n placas conductoras de áreas $A, 2A, 4A, \dots, 2^k A, \dots, 2^{n-1} A$, están ordenadas formando una pila vertical. La distancia entre las placas sucesivas es d y entre ellas hay un material de conductividad $G = \text{cte}$. Experimentalmente se encuentra que la resistencia eléctrica entre la primera y segunda placa es 1Ω .

- Calcule la resistencia total cuando $n \rightarrow \infty$
- Considere la situación de la Fig P.5.3.2 en el límite cuando $n \rightarrow \infty$ y calcule la intensidad de corriente que circula por la resistencia de 1Ω conectada entre la cuarta placa y la tierra.

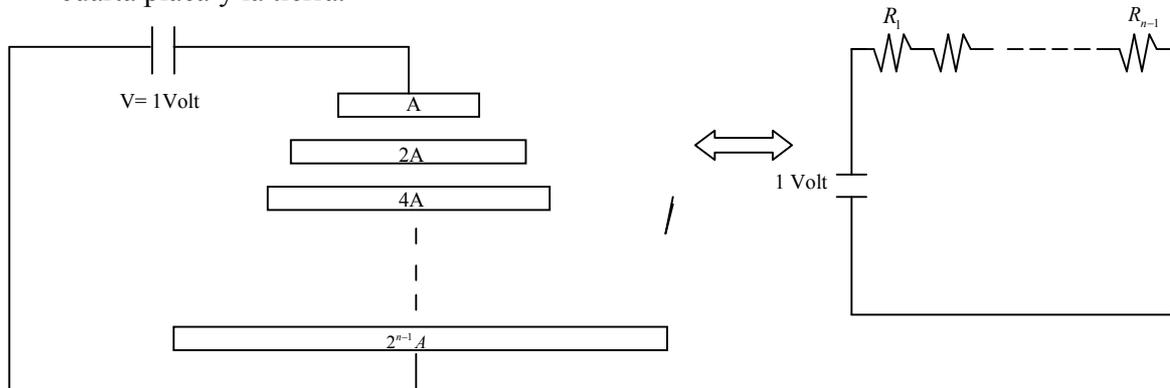


Figura P.5.3.1

Indicación: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$

Solución:

$$I = \iint J \cdot dS = \iint g \cdot E \cdot dS$$

$$I = \iint J(\hat{k}) \cdot dS = \iint J \cdot dx \cdot dy = J \cdot A$$

$$\Leftrightarrow g \cdot E \cdot A = I$$

$$R = \frac{V}{g \cdot E \cdot A}$$

$$\nabla V = -E \Leftrightarrow \frac{dV}{dz} = -E \Rightarrow dV = -E \cdot dz$$

Integrando

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = - \int_0^d E \cdot dz \Leftrightarrow \underbrace{V_2 - V_1}_{-V} = -E \cdot d \Rightarrow V = E \cdot d$$

$$\Rightarrow R = \frac{d}{g \cdot A}$$

$$R_T = \frac{d}{g \cdot A} + \frac{d}{g \cdot 2A} + \dots + \frac{d}{g \cdot 2^{n-1} \cdot A}$$

$$R_{n \rightarrow \infty} = \frac{d}{g \cdot A} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \right) = \frac{d}{g \cdot A} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{d}{g \cdot A} \cdot 2$$

$$R_{T_{n \rightarrow \infty}} = \frac{2d}{g \cdot A} \quad \text{però} \quad \frac{d}{g \cdot A} = R_1 = 1\Omega$$

$$\Rightarrow R_T = 2 \cdot \left(\frac{d}{g \cdot A} \right) = 2\Omega$$

b)

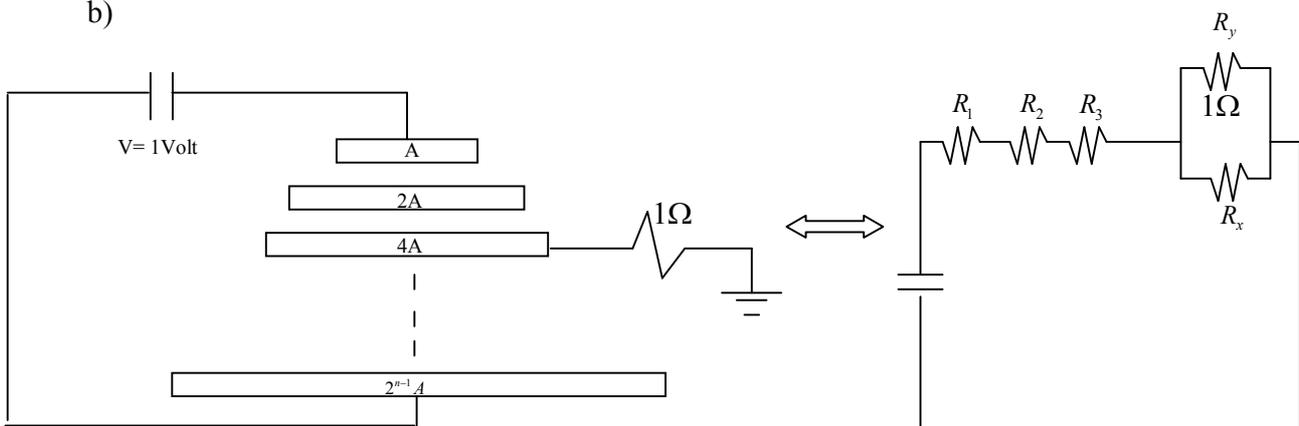


Figura P.5.3.2

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{d}{g \cdot A} + \frac{d}{2g \cdot A} + \frac{d}{4g \cdot A}$$

$$= 1[\Omega] + \frac{1}{2}[\Omega] + \frac{1}{4}[\Omega] = \frac{7}{4}[\Omega]$$

$$R_T = 2[\Omega]$$

$$\Rightarrow R_x = 2[\Omega] - \frac{7}{4}[\Omega] = \frac{1}{4}[\Omega]$$

$$R_{\text{paralelo } R_x R_y} = \frac{R_x \cdot R_y}{R_x + R_y} = \frac{1/4 \cdot 1}{1/4 + 1} = \frac{1}{5}[\Omega]$$

$$R_T = \frac{7}{4}[\Omega] + \frac{1}{5}[\Omega] = \frac{39}{20}[\Omega]$$

$$I_T = \frac{V_T}{R_T} = \frac{1}{\frac{39}{20}}[A] = \frac{20}{39}[A]$$

$$V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} + V_{R_y} = 1[V]$$

$$I_T \cdot (R_1 + R_2 + R_3) + V_{R_y} = 1[V]$$

$$\frac{20}{39} \cdot \frac{7}{4} + V_{R_y} = 1$$

$$V_{R_y} = 1 - \frac{35}{39}[V]$$

$$V_{R_y} = \frac{4}{39}[V]$$

$$I_{1\Omega} = \frac{V_{1\Omega}}{1[\Omega]} = \frac{\frac{4}{39}[V]}{1[\Omega]} = \frac{4}{39}[A]$$

5.15 Problemas Propuestos

PROBLEMA 1

En el circuito de la figura, el interruptor K_1 permanece cerrado y el K_2 abierto hasta que el condensador C se carga a un potencial V_0 . En $t=0$ se abre K_1 y se cierra K_2 . Para $t \geq 0$ determinar:

- El voltaje en el condensador.
- El tiempo que demora el condensador en descargarse.
- La potencia en la resistencia en función del tiempo.

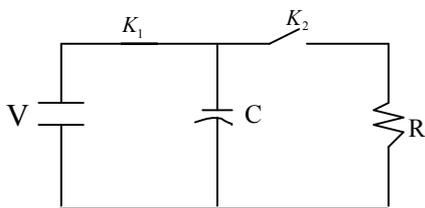


Figura PP.5.1

PROBLEMA 2

Se tiene un tren de juguete que se mueve sobre rieles colocados en forma de circunferencia. Los rieles tienen una resistencia r por unidad de longitud y el tren tiene una resistencia R . Se aplica una diferencia de potencial V_0 entre los rieles.

- Encuentre y dibuje el circuito equivalente.
- Encuentre la corriente que pasa por el tren cuando este se encuentra formando un θ con la dirección de referencia.

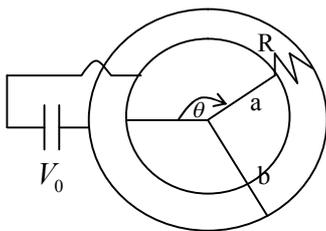


Figura PP.5.2

PROBLEMA 3

Se quiere energizar un circuito electrónico por el que circulan 20 mA a 2400 Volts. Para esto se dispone de una fuente de tensión de corriente continua de 3000 Volts que tiene una resistencia interna de $10\text{ k}\Omega$; y de un divisor de tensión formado por dos resistencias; como se indica en la siguiente figura:

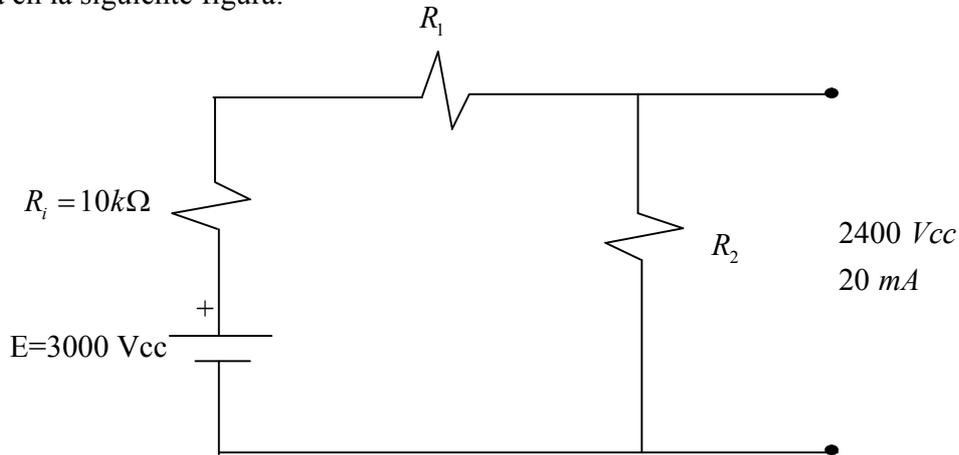


Figura PP.5.3.1

- Se pide calcular las resistencias R_1 y R_2 para alimentar el circuito de modo que la potencia entregada por la fuente de tensión sea mínima; calcule esta potencia.
- En el mismo circuito se quiere además hacer funcionar un galvanómetro ideal (sin resistencia interna), que funciona solamente si la corriente es igual o mayor que 20 mA. El circuito a emplear en esta parte es el que se muestra a continuación:

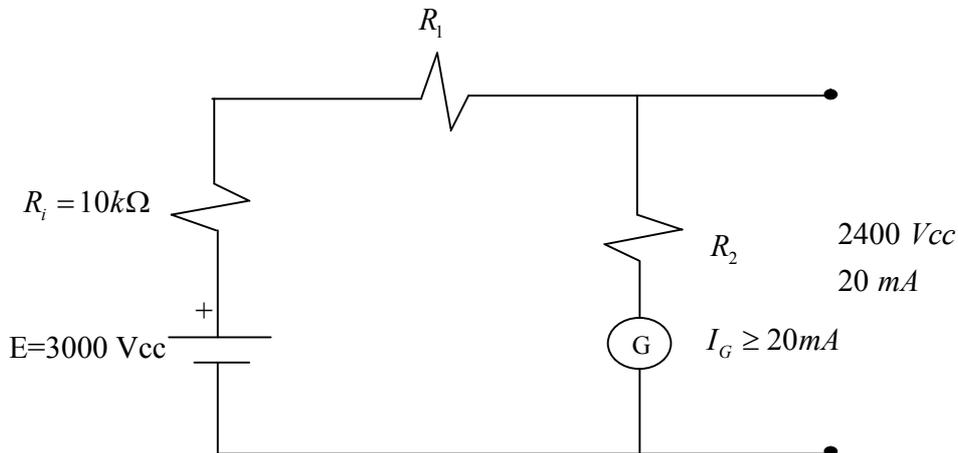


Figura PP.5.3.2

Se pide calcular las resistencias R_1 y R_2 para alimentar el circuito de modo que la entrega de potencia por la fuente sea mínima; calcule esta potencia.

PROBLEMA 4

Una barra de cobre de conductividad g y sección rectangular ha sido deformada como se indica en la Figura PP.5.3.4. Los parámetros del sistema son:

- $g = 5,8 \times 10^7$
- $h_1 = 1$ m
- $h_2 = 0,2$ m
- $b = 0,3$ m

I. Suponiendo que una corriente I constante fluye atravesando el conductor en el sentido radial ($\hat{\rho}$) se pide:

- El vector densidad de corriente \vec{J} ,
- La resistencia entre las caras definidas por $\rho=h_1$ y $\rho=h_2$,
- Calcule las pérdidas joule en el conductor

II. Suponiendo que una corriente I constante fluye atravesando el conductor en el sentido tangencial ($\hat{\theta}$) se pide:

- El vector densidad de corriente \vec{J} ,
- La resistencia entre las caras definidas por $\theta=0$ y $\theta=\pi/2$,
- Calcule las pérdidas joule en el conductor

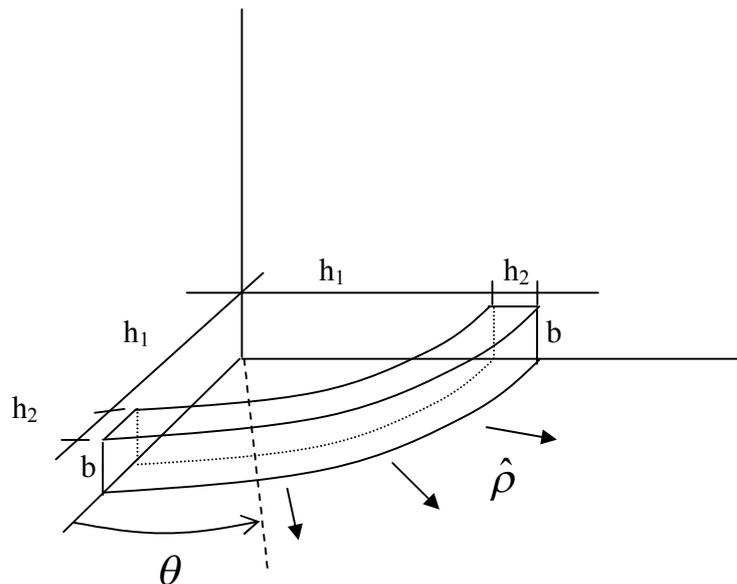


Figura PP.5.3.4