

Energía en el campo magnético.

En clase se demostró que la energía acumulada U en una inductancia L recorrida por una corriente I , es: $W = LI^2/2$.

Estudiaremos ahora lo que sucede cuando tenemos dos circuitos de inductancia L_1 y L_2 que además tienen una inductancia mutua M , y están recorridos por corrientes I_1 e I_2 , respectivamente.

Las f.e.m. inducidas son: ϵ_1 y ϵ_2 en cada uno de los circuitos.

$$\epsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \quad \epsilon_2 = -M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

$$\frac{dW_1}{dt} = \left(L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \right) I_1 \quad \frac{dW_2}{dt} = \left(M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} \right) I_2$$

integrando :

$$W_1 = L_1 \int I_1 \frac{dI_1}{dt} dt + M \int I_1 \frac{dI_2}{dt} dt \quad W_2 = M \int I_2 \frac{dI_1}{dt} dt + L_2 \int I_2 \frac{dI_2}{dt} dt$$

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M \int \frac{d}{dt} (I_1 I_2) dt + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

$$\text{en general : } U = \frac{1}{2} \sum_k \sum_j M_{kj} I_j I_k$$

Se agrega el factor $1/2$ porque $M_{kj} = M_{jk}$.

Tomando en cuenta que : $\sum_j M_{kj} I_j = \phi_k$ (flujo magnético en circuito k)

$$U = \frac{1}{2} \sum_k \phi_k I_k = \frac{1}{2} \int_S \vec{B}_k \cdot d\vec{S} \int_S \vec{J}_k \cdot d\vec{S}$$

Substituyendo : $\vec{B}_k = \nabla \times \vec{A}_k$:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \nabla \times \vec{A}_k \cdot \vec{dS} \int_S \vec{J}_k \cdot \vec{dS} \quad \text{y empleando el Teorema de Stokes :}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_C \vec{A}_k \cdot d\vec{r}_k \int_S \vec{J}_k \cdot \vec{dS}.$$

$$\text{Reemplazando } \int_C d\vec{r}_k \int_S \vec{dS} \text{ por } \int_V d^3r \text{ se llega a : } U = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} \, d^3r$$

$$\text{Recordando que } \vec{J} = \nabla \times \vec{H} \text{ se llega a : } U = \frac{1}{2} \int_V \nabla \times \vec{H} \cdot \vec{A} \, d^3r$$

$$\text{empleando la identidad : } \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{A}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) \, d^3r + \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{A} \, d^3r$$

$$\text{y por el teorema de Gauss de la divergencia : } U = \frac{1}{2} \oint_S \vec{H} \times \vec{A} \cdot \vec{dS} + \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} \, d^3r$$

$$\text{Si } S \rightarrow \infty, \quad \vec{H} \rightarrow \frac{1}{r^2} \text{ y } \vec{A} \rightarrow \frac{1}{r} \quad \therefore \oint_S \rightarrow 0$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} \, d^3r \quad \text{y } \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu} = \frac{\mu |\vec{H}|^2}{2} = \text{densidad de energ\'ia.}$$

$$\text{El resultado final es an\'alogo al de la electrost\'atica : } U = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} \, d^3r$$