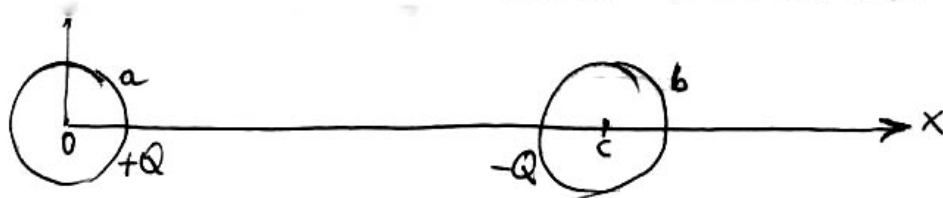


Para ejercicio 2



- ① El eje x coincide con los centros de las esferas. Ponemos una carga $+Q$ en la esfera de radio a que tiene su centro en $x=0$ y ponemos carga $-Q$ en la esfera de radio b que tiene su centro en $x=c$

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(c-x)} \right] = \text{potencial en el eje } x, \text{ entre las esferas.}$$

$$\text{para } x=a \text{ y } x=(c-b): V(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{(c-a)} \right]$$

$$V(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(c-b)} - \frac{1}{b} \right]$$

$$V(a) - V(b) = \Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{(c-a)} - \frac{1}{(c-b)} \right]$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(a+b-c)(2ab-ac-bc)}{ab(c-a)(c-b)}$$

$$c = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab(c-a)(c-b)}{(a+b-c)(2ab-ac-bc)}$$

② Dos métodos: i) Ley de Gauss; ii) Ecuac. Laplace.

i) Ley de Gauss: Para un cilindro de longitud L y radio r , con $a \leq r \leq b$:

$$2\pi r L E = \frac{2\pi a L \sigma_a}{\epsilon_0} \quad \text{siendo } \sigma_a \text{ la densidad de carga superficial en el conductor interno}$$

$$\therefore E(r) = \frac{a \sigma_a}{\epsilon_0 r} \quad a \leq r \leq b \quad \dots (1)$$

$$ii) \quad V(r) - V(a) = - \int_a^r E \, dr = - \frac{a \sigma_a}{\epsilon_0} \int_a^r \frac{dr}{r}$$

$$V(r) = V(a) - \frac{a \sigma_a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad \text{pero } V(a) = V_0 \text{ (dato)}$$

$$V(r) = V_0 - \frac{a \sigma_a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad \dots (2)$$

Para encontrar σ_a : $V(b) = 0$.

$$V(b) = V_0 - \frac{a \sigma_a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \therefore \text{despejando } \sigma_a:$$

$$\sigma_a = \frac{\epsilon_0 V_0}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \dots (3)$$

Reemplazando (3) en (1) y en (2):

$$E(r) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) r} \quad a \leq r \leq b \quad \dots (4)$$

$$V(r) = V_0 \left[1 - \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} \right] \quad a \leq r \leq b \quad \dots (5)$$

ii) Método de resolver la Ecuac. de Laplace $\nabla^2 V = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{Integrando dos veces:}$$

$$V(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Condiciones de borde: $V(a) = V_0 \quad V(b) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} C_1 \ln a + C_2 = V_0 \\ C_1 \ln b + C_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$C_1 \ln\left(\frac{a}{b}\right) = V_0$$

$$\therefore C_1 = \frac{-V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$C_2 = V_0 + \frac{V_0 \ln(a)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$V(r) = -\frac{V_0 \ln(r)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + V_0 + \frac{V_0 \ln(a)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$V(r) = V_0 - \frac{V_0 \ln(r/a)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \text{igual que (5)}$$

$$E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}; \quad \text{derivando (5) se obtiene (4)}$$

c) $\lambda_a =$ carga por unidad de longitud.

$$\lambda_a = 2\pi a \sigma_a = \frac{2\pi \epsilon_0 V_0}{\ln(b/a)} \quad \text{al reemplazar (3)}$$

En el cilindro exterior: σ_b .

Ley de Gauss para un cilindro de longitud L y radio $r = b + \Delta b$ que quede dentro del conductor, con lo cual $E(b + \Delta b) = 0$.

$$2\pi r L E = 0 = \frac{2\pi(a\sigma_a + b\sigma_b)}{\epsilon_0}$$

$$\sigma_b = -\frac{a}{b}\sigma_a$$

$$\sigma_b = \frac{-\epsilon_0 V}{b \ln(b/a)}$$

$$\lambda_b = 2\pi b \sigma_b = \frac{-2\pi\epsilon_0 V_0}{\ln(b/a)} //$$

Para $r > b$ $E(r) = 0$, $V(r) = 0$.