$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad Q = \sum_i q_i$$

<u>Aplicaciones</u>:

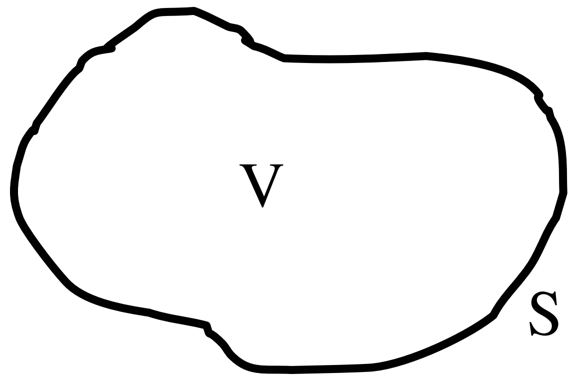
1) Recta infinita con dens. de carga lineal λ. Calc. $E(r)$.

2) Distribución uniforme de carga en volumen de esfera de radio a.

Forma diferencial de la ley de Gauss

Sea una distribución de carga con densidad $\rho(\vec{r})$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})d^3r'$$



Emplear Teorema de Gauss

(llamado también Teorema de la divergencia de Gauss)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{E}\, d^3 r'$$

Comparando con la Ley de Gauss: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \dfrac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} \int_V \boldsymbol{\rho}(\vec{r}) d^3 \mathbf{r}'$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}$$

1) Ley de Gauss

2) (Teorema de Gauss)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\mathbf{q}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} \qquad \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}$$

1) Teorema de Gauss

2) (Teorema de la divergencia de Gauss)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}\, \mathbf{d}^3\mathbf{r'}$$

$$\vec{E} = -\nabla V \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 V$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

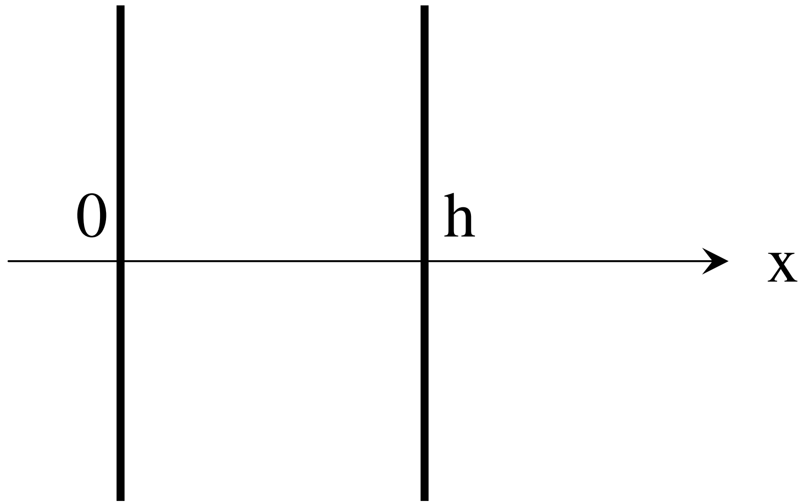
Ecuación de Poisson

Si $\rho = 0, \qquad \nabla^2 V = 0$

Ecuación de Laplace

Ejemplos de solución de la ecuac. de Laplace en una dimensión:

1) Dos planos paralelos, infinitos.



Ejemplos de solución de la ecuac. de Laplace en una dimensión:

2) Dos esferas concéntricas

Laplaciano en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

$$\text{Si} \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \;\; \text{y} \;\; \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad \nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = C_1 \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2}$$

$$V = \frac{-C_1}{r} + C_2$$

Campo eléctrico en la atmósfera

Modelo: $\vec{\mathbf{E}} = \mathbf{-}\left(\mathbf{ae}^{-\alpha z} + \mathbf{be}^{-\beta z}\right)\hat{\mathbf{k}}$ $\qquad \alpha, \beta > 0$

Encontrar densidad de carga:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \therefore \qquad \rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}$$

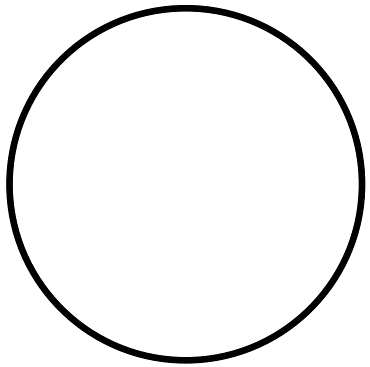
$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E_z}}{\partial z} = \left(\mathbf{a}\alpha\mathbf{e}^{-\alpha z} + \mathbf{b}\beta\mathbf{e}^{-\beta z}\right)$$

$$\rho = \varepsilon_0\left(\mathbf{a}\alpha\mathbf{e}^{-\alpha z} + \mathbf{b}\beta\mathbf{e}^{-\beta z}\right)$$

Encontrar la carga total q en un cilindro de área basal A.

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\int_0^{\infty} \boldsymbol{\rho}\,\mathbf{dz}$$

$$= \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_0\left(\int_0^{\infty} \mathbf{a}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}^{-\boldsymbol{\alpha}\mathbf{z}}\mathbf{dz} + \int_0^{\infty} \mathbf{b}\boldsymbol{\beta}\mathbf{e}^{-\boldsymbol{\beta}\mathbf{z}}\mathbf{dz}\right) \quad = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_0(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$



R_1

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\frac{E}{V} = \frac{1}{R} \qquad E = \frac{V}{R}$$

Chispa ocurre si $E \sim 3x10^6$ V/m en aire seco

$E \sim 1x10^6$ V/m en aire húmedo

Pararayos (Franklin)