AUXILIAR 1

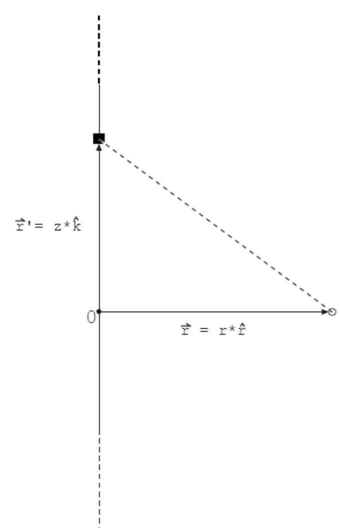
PROBLEMA 1

Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del espacio, producido por una recta de carga infinita (con densidad lineal de carga λ_0). Luego, aplicar el teorema de Gauss para obtener el mismo resultado. (Se considera un punto genérico en el que se mide E a una distancia “r” del hilo infinito).

SOLUCIÓN:
Se calculará el campo eléctrico por definición:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}dq$$

Los vectores involucrados en la integral se aprecian en el siguiente dibujo (están expresados en coordenadas cilíndricas, dada la simetría del problema):



Y, dado que se trata de una recta de carga, el diferencial de carga es $dq = \lambda_0 dz$

Con esto se tiene que:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{r\hat{r}-z\hat{k}}{\sqrt[2]{r^2+z^2}^3}\lambda_0 dz$$

La integral anterior se puede dividir en dos integrales:

i) $\int \frac{1}{\sqrt[2]{r^2+z^2}^3} dz$, se resuelve fácilmente haciendo el cambio de variable $z = r \tan u$, con esto se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[2]{r^2+z^2}^3} dz = \frac{1}{r^2} \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{+\infty}{r}\right)\right) - \frac{1}{r^2} \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{-\infty}{r}\right)\right) = \frac{2}{r^2}$$

ii) $\int \frac{z}{\sqrt[2]{r^2+z^2}^3} dz$. Acá se está integrando una función impar con respecto al origen, por lo que al evaluarla entre -∞ y +∞ el resultado será cero. Para resolver la integral, el cambio de variable adecuado es $u = r^2 + z^2$, y el resultado es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{\sqrt[2]{r^2+z^2}^3} dz = \frac{-1}{\sqrt{r^2+(+\infty)^2}} - \frac{-1}{\sqrt{r^2+(-\infty)^2}} = 0$$

Reemplazando estos resultados en la expresión inicial se tiene:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{r\hat{r} - z\hat{k}}{\sqrt[2]{r^2+z^2}^3} \lambda_0 dz = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} r\lambda_0 \frac{2}{r^2}\hat{r} = \frac{\lambda_0}{2\pi r\varepsilon_0}\hat{r}$$

APLICANDO EL MÉTODO DE GAUSS:

Se elige una superficie que encierre completamente la distribución de carga. La elección lógica es una superficie cilíndrica de radio “r” (o sea, de radio igual a la distancia del punto en cuestión). Además, se asume que el campo eléctrico apunta en dirección radial (por simetría), esto es, $\vec{E} = E(r) \cdot \hat{r}$. El diferencial de área de la superficie escogida es $\overrightarrow{dS} = r \cdot d\theta \cdot dz \cdot \hat{r}$. Se reemplazan estos valores en la siguiente expresión:

$$\int \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

$$\int E(r) \cdot \hat{r} \cdot r \cdot d\theta \cdot dz \cdot \hat{r} = \frac{\int \lambda_0 dz}{\varepsilon_0}$$

La integral del lado izquierdo se integra con respecto a θ y a z, por lo que lo dependiente de r puede salir de esta integral:

$E(r) \cdot 2\pi r \cdot \int dz = \frac{\lambda_0}{\varepsilon_0} \cdot \int dz$ → Las integrales se anulan y se despeja E(r), llegando a $E(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi r \varepsilon_0}$

Por lo tanto, el resultado final es: $\vec{E} = \frac{\lambda_0}{2\pi r \varepsilon_0}\hat{r}$

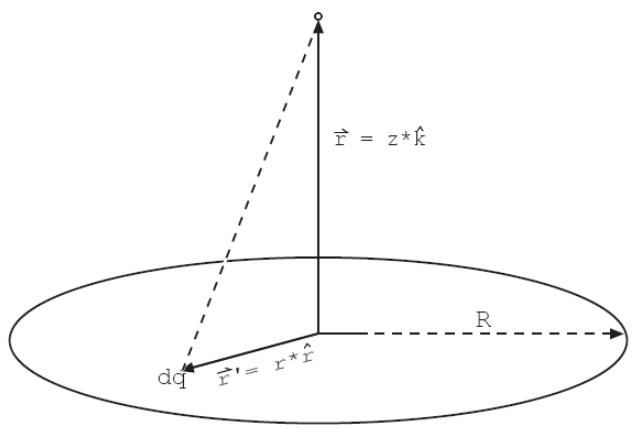
Tal como se había calculado.

PROBLEMA 2

Calcular el campo eléctrico en un punto del eje de un disco de radio R cargado con densidad de carga uniforme σ_0. Extender el resultado para calcular el campo eléctrico producido por un plano de carga infinito.
Luego, aplicar el teorema de Gauss para obtener este último resultado.

SOLUCIÓN:

El problema se debe plantear en coordenadas cilíndricas, como se muestra en el siguiente dibujo:



El diferencial de carga es $dq = \sigma_0 dS = \sigma_0 r d\theta dr$. Se tiene entonces:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} dq$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int \frac{z\hat{k} - r\hat{r}}{\sqrt[2]{r^2+z^2}^3}\sigma_0 r d\theta dr$$

Esta última integral se puede dividir en dos más simples:

i) $\int_0^R \frac{r}{\sqrt[2]{r^2+z^2}^3} dr$, como se puede ver en el problema anterior en el problema anterior esta integral vale:

$$\int_0^R \frac{r}{\sqrt[2]{r^2+z^2}^3} dr = \frac{-1}{\sqrt{z^2+(R)^2}} - \frac{-1}{\sqrt{z^2+(0)^2}} = \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

ii) $\int_0^R \frac{r^2}{\sqrt[2]{r^2+z^2}^3} dr$. Su valor al ser evaluada es cero. (Este resultado se deja propuesto).

Luego se reemplazan estos dos resultados en la expresión de campo eléctrico anterior:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int \frac{z\hat{k} - r\hat{r}}{\sqrt[2]{r^2+z^2}^3} \sigma_0 r d\theta dr = \frac{z\sigma_0 2\pi}{4\pi\varepsilon_0} \hat{k} \cdot \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) = \frac{z\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat{k}$$

Para calcular el campo eléctrico generado por un plano infinito en un punto del espacio (a distancia "z" del plano) lo único que se debe hacer es calcular el límite cuando R tiende a infinito (de la expresión antes calculada):

$$\overrightarrow{E_{PLANO}} = \lim_{R\to\infty} \overrightarrow{E_{DISCO}} = \frac{z\sigma_0 2\pi}{4\pi\varepsilon_0} \hat{k} \cdot \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+\infty^2}}\right) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|}\right)\hat{k}$$

Una conclusión importante de este último resultado es que el campo eléctrico producido por un plano infinito cargado uniformemente es <u>constante</u> sobre una de sus caras (solo puede cambiar el signo).

APLICANDO EL MÉTODO DE GAUSS:

Se elige una superficie que encierre completamente la distribución de carga. La elección lógica es una superficie cilíndrica (de radio infinito). Además, se asume que el campo eléctrico apunta en dirección perpendicular al plano (por simetría). Esto último implica que el campo eléctrico no depende de r ni de θ, solo de z. Con esto, el campo eléctrico tiene la forma $\vec{E} = E(z) \cdot \hat{k}$ para la tapa superior del cilindro y $\vec{E} = -E(z) \cdot \hat{k}$ para la tapa inferior. El diferencial de área de la superficie escogida e $\overrightarrow{dS} = r \cdot d\theta \cdot dr \cdot \hat{k}$ s para la tapa superior del cilindro, y $\overrightarrow{dS} = -r \cdot d\theta \cdot dr \cdot \hat{k}$ para la tapa inferior. Se reemplazan estos valores en la siguiente expresión:

$$\int \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

$$\int E(z) \cdot \hat{k} \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \cdot \hat{k} \; + \int -E(z) \cdot \hat{k} \cdot -r \cdot d\theta \cdot dr \cdot \hat{k} \; = \frac{\int \sigma_0 r d\theta dr}{\varepsilon_0}$$

La integral del lado izquierdo se integra con respecto a θ y a r, por lo que lo dependiente de z puede salir de esta integral:

$2 \cdot E(z) \cdot 2\pi \cdot \int r dr = \frac{\sigma_0 2\pi}{\varepsilon_0} \cdot \int r dr$ → Las integrales se anulan y se despeja E(z), llegando a $E(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$

Por lo tanto, el resultado final es:

$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{r}$ para la tapa superior, y $\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{r}$ para la tapa inferior

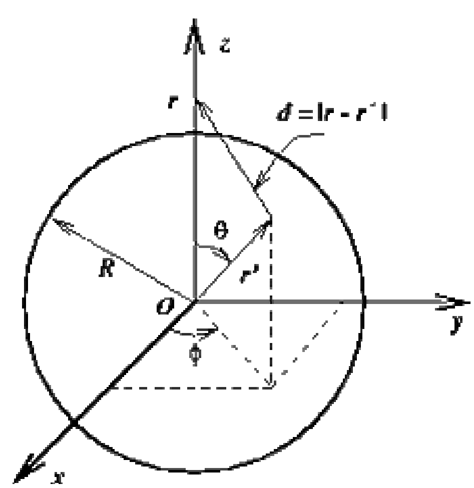
Como se había calculado.

PROBLEMA 3

Calcular el campo eléctrico producido por una esfera de radio R cargada uniformemente (ρ_0) en un punto del espacio (que está a distancia "r" del centro de la esfera). Corroborar el resultado mediante el método de Gauss.

SOLUCIÓN:

Este problema se debe resolver mediante el uso de coordenadas esféricas (obviamente), como lo muestra el siguiente dibujo:



Estableciendo un eje de coordenadas cartesianas (fijas, pues se está calculando en un punto fijo en el espacio) se puede ver que el elemento de carga se encuentra en la posición siguiente:

$$\vec{r'} = r' \cos\theta \sin\varphi\, \hat{\imath} + r' \sin\theta \sin\varphi\, \hat{\jmath} + r' \cos\varphi\, \hat{k} = r' \sin\varphi\, \hat{\theta} + r' \cos\varphi\, \hat{k}$$

Pues $\ddot{\theta} = \cos\theta\, \hat{\imath} + \sin\theta\, \hat{\jmath}$

Con esto, el campo eléctrico se expresa como:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\|\vec{r} - \vec{r'}\|^3} dq$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int\int \frac{r\hat{k} - r' \cos\varphi\, \hat{k} - r' \sin\varphi\, \hat{\theta}}{\|r\hat{k} - r' \cos\varphi\, \hat{k} - r' \sin\varphi\, \hat{\theta}\|^3} \rho_0 r'^2 \sin\varphi\, dr' d\theta d\varphi$$

Ahora, utilizando la siguiente expresión:

$$\frac{r' \cos\varphi - r}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\varphi)^{3/2}} = \frac{d}{dr}\left\{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\varphi)^{-1/2}\right\}$$

Y además notando que el campo no apunta en dirección de $\hat{\theta}$ (la integral queda propuesta), se llega a lo siguiente:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{d}{dr}\left\{\int_0^R \frac{r'}{r}(|r + r'| - |r - r'|)dr'\right\}\hat{k}$$

Esta expresión se debe evaluar para dos casos: “r<R” dentro de la esfera, y “r>R” fuera de la esfera. Esto último es simple, y los resultados son los siguientes

Para r < R: $\vec{E} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{k}$

Para r > R: $\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{k}$

APLICANDO EL MÉTODO DE GAUSS:

Para aplicar el método se escoge una superficie de casquete esférico de radio “r” (donde está el punto de análisis). El diferencial de superficie es entonces $\overline{dS} = r'^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot \hat{r}$. El campo eléctrico apunta en dirección radial y solo depende de la distancia del punto al centro de la esfera $\vec{E} = E(r) \cdot \hat{r}$. Luego, se tiene:

$$\int \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

$$\int E(r) \cdot \hat{r} \cdot r^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot \hat{r} = \frac{\int \rho_0 r'^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr'}{\varepsilon_0}$$

Como se está integrando con respecto a θ y a φ en el lado izquierdo, se obtiene:

$$E(r) \cdot r^2 \cdot 4\pi = \frac{\int \rho_0 dV}{\varepsilon_0}$$

Para el caso r<R, se considera solo la esfera de radio r, o sea, la que está encerrada por la superficie. Con esto se tiene que:

$$E(r) \cdot r^2 \cdot 4\pi = \frac{\rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 \cdot r}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 \cdot r}{3\varepsilon_0}\hat{r}$$

Para el caso r>R, se considera solo la esfera completa (un volumen definido por R)

$$E(r) \cdot r^2 \cdot 4\pi = \frac{\rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 \cdot R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 \cdot R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Estos resultados son los mismos que se obtuvieron utilizando la definición.

(Realizado por Felipe Mira)