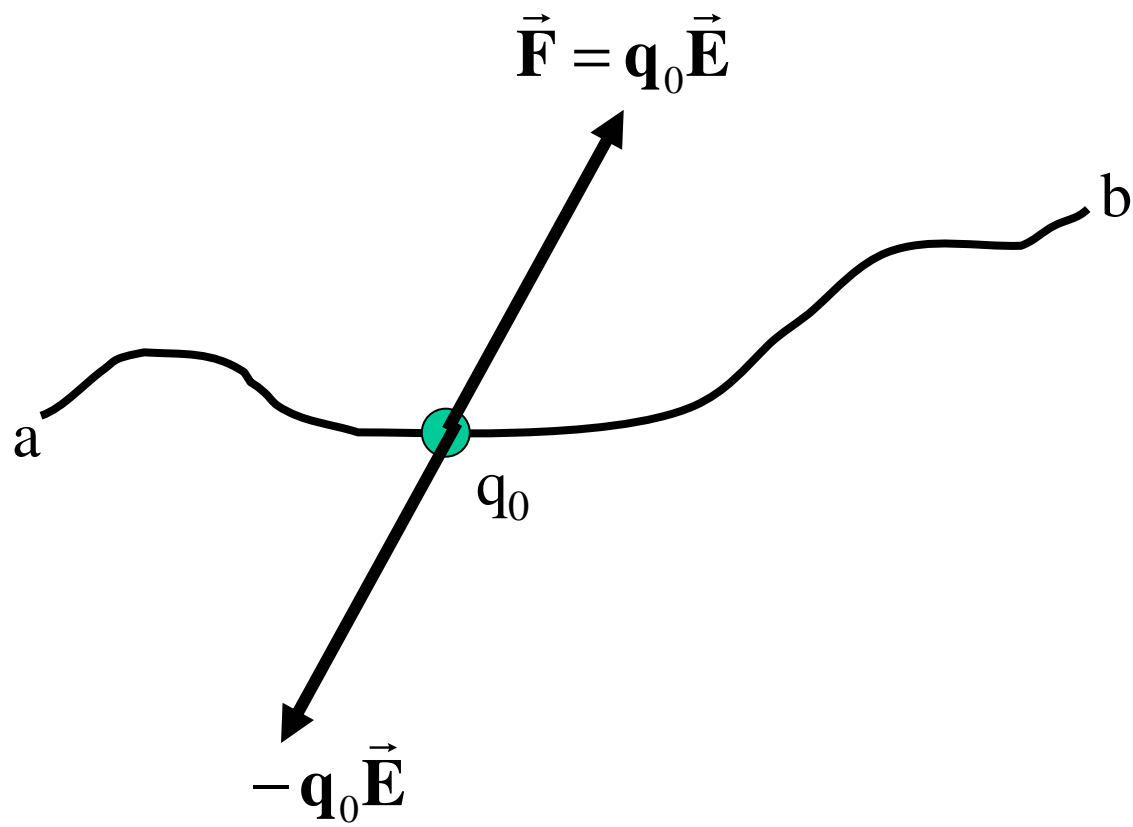


Definición de potencial



Definición: $V_b - V_a =$ Diferencia de potencial entre a y b.

$V_b - V_a =$ Trabajo que se entrega a la carga unitaria
para que se mueva entre a y b.

$$W = -q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$V(r)$ está indefinido por una constante.

Para definirlo: $V(\infty) = 0$

$$V_{\infty} - V_a = - \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \therefore \quad V_a = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ejemplo: Potencial causado por una carga puntual q .

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V(\mathbf{R}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbf{R}}^{\infty} \frac{d\mathbf{r}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-1}{r} \Big|_{\mathbf{R}}^{\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\mathbf{R}}$$

Demostrar que: $\vec{E} = -\nabla V$

$$\Delta W = V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)$$

$$\Delta W = \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x$$

$$\text{pero: } \Delta W = - \int_x^{x+\Delta x} E_x dx = -E_x \Delta x \quad \therefore E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\text{tambi3n: } E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad \therefore \vec{E} = -\nabla V$$

Demostrar que : $\nabla \times \vec{E} = 0$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times (\nabla V) = - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) - \hat{j} (...) + \hat{k} (...) = 0$$

Distribución de carga de volumen,
densidad de carga ρ .

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Ej: Encontrar el potencial causado por una carga distribuida uniformemente en la superficie de una esfera de radio R.
(densidad de carga = σ)

(dibujar)

$$r^2 = z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi R^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{r}$$

$$2rdr = 2zR \cdot \sin\theta d\theta$$

$$\therefore \sin\theta d\theta = \frac{rdr}{zR}$$

$$V(z) = \frac{\sigma \cdot 2\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot zR} \cdot \int_{z-R}^{z+R} dr = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot z}$$

Deducir campo eléctrico:

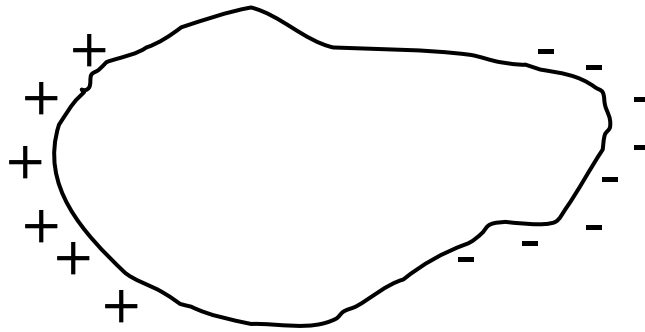
$$\mathbf{E}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

2º caso: Punto dentro de la esfera.

$$V(z) = \frac{\sigma \cdot 2\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot zR} \cdot \int_{R-z}^{R+z} dr = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} = \text{const.}$$

En un conductor, $\vec{E} = 0$, para lo cual se desarrolla carga superficial.

Por lo tanto $V = \text{Const.}$ (equipotencial)



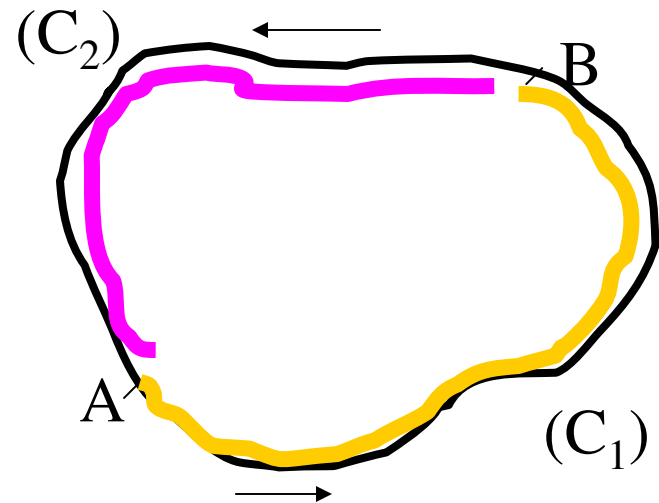
Dem. que se cumple: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Trayectoria cerrada

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{A(C_1)}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{B(C_2)}^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

—————
 $A(C_1)$

—————
 $B(C_2)$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = (V_A - V_B) + (V_B - V_A) = 0$$

Demostrar que $\vec{E}$ es perpendicular a una superficie equipotencial

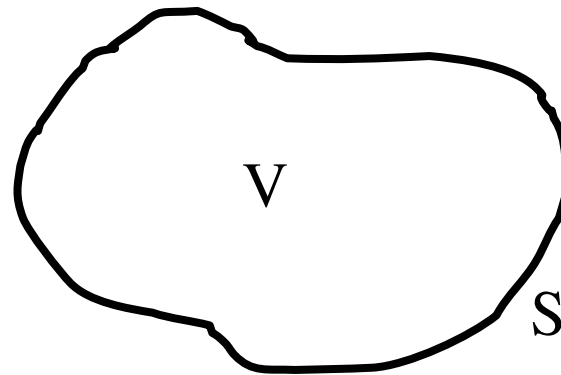
Supong. que $\vec{E} = E_n \hat{n} + E_{//} \hat{s}$

dibujo

$$E_{//} = -\frac{\partial V}{\partial s} = 0 \quad \therefore \vec{E} = E_n \hat{n} \quad \text{q.e.d.}$$

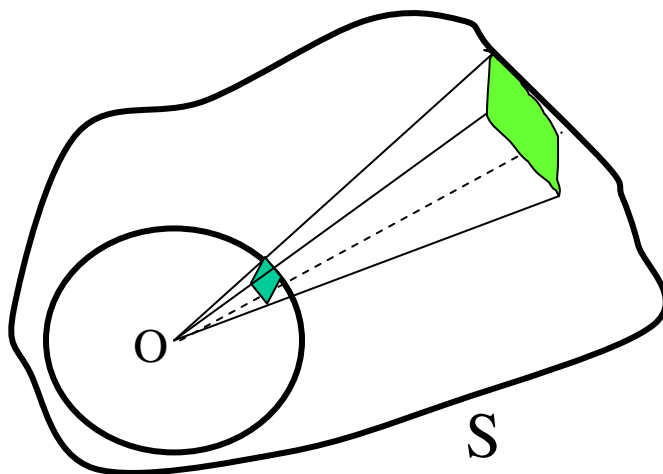
Ley de Gauss (o teor. de Gauss)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

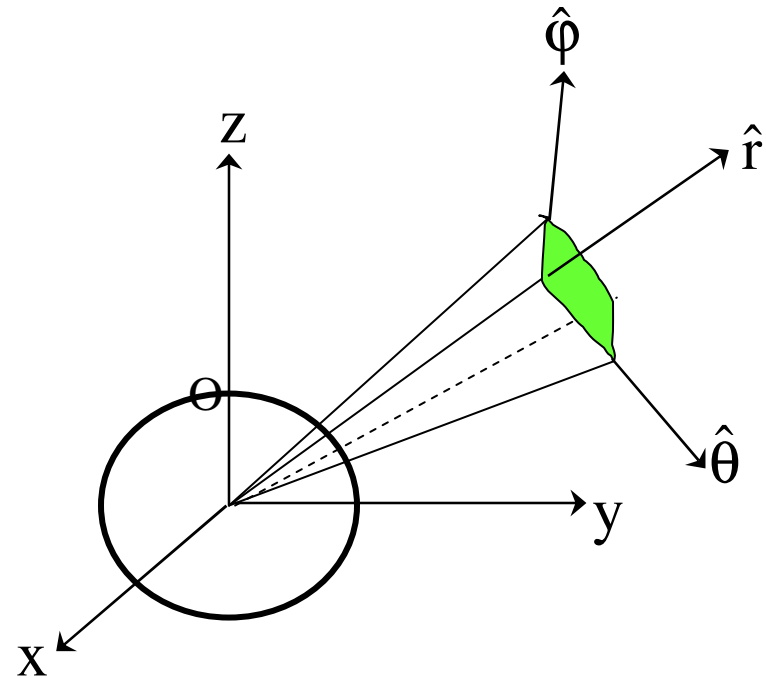


1) Caso particular: Superficie esférica con una carga puntual q en el centro.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E 4\pi r^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2}$$



$$d\vec{S} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r} + r \sin\theta \, dr \, d\phi \, \hat{\theta} + r \, dr \, d\theta \, \hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} \hat{r} \cdot d\vec{S} &= r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= r^2 d\Omega \end{aligned}$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$