Miércoles 25 Junio - Problemas de Sistemas no Inerciales

FI2A1 - Mecánica
Prof. René Rojas
Semestre Otoño 2008
Auxs: Hernán González & Kim Hauser

P1

Una circunferencia de radio ρ_o, en un plano vertical, gira en torno a un eje fijo con velocidad angular ω. El centro de la cicunferencia describe, en su giro, una circunferencia de radio R. El plano de la circunferencia se mantiene siempre perpendicular al vector $\vec{R}$ de la figura. Una partícula de masa m puede deslizar sin roce por la circunferencia de radio ρ_o.
El problema es describir la ecuación de movimiento para esta partícula y sus propiedades. Para hacerlo puede escoger el sistema de referencia S' que desee.

(a) Defina claramente el sistema S' escogido y calcule las fuerzas centrífuga, de Coriolis y transversal que actúan sobre la partícula.

(b) Obtenga la ecuación de movimiento completa y de ella obtenga una ecuación -sin coeficientes desconocidos- para el ángulo ϕ de la forma:

$$\ddot{\phi} = f(\phi) \tag{1}$$

(c) Discuta bajo qué condiciones la posición $\phi = 0$ es estable/inestable y, en los casos en que $\phi = 0$ sea estable, obtenga la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a ese ángulo.

(d) En los casos en que $\phi = 0$ es inestable obtenga otro ángulo ϕ_1 que sí define una posición estable. Obtenga la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a ϕ_1.

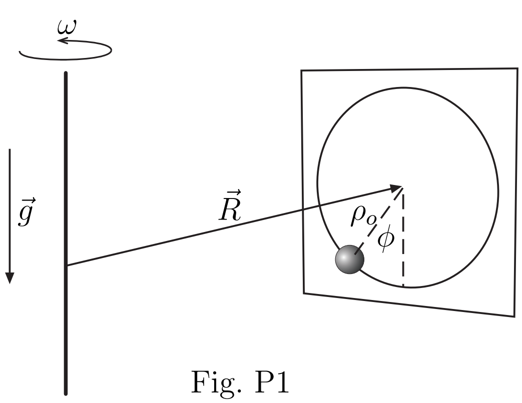

Fig. P1

Respuestas P1

(b)$\ddot{\phi} = \operatorname{sen}\phi(\omega^2 \cos\phi - \frac{g}{\rho_o})$;

(c)$\phi_o = 0 \qquad \textit{estable} \quad \textit{si} \qquad \omega^2 < \frac{g}{\rho_o}; \quad \omega^2_{p.o.}[\phi_o] = \frac{g}{\rho_o} - \omega^2$

(d)$\phi_1 = \arccos(\frac{g}{\rho_o \omega^2}); \quad \omega^2_{p.o.} = \omega^2 - \frac{g^2}{\rho_o^2 \omega^2}$

P2

Una plataforma de ancho $2L$, rota en el plano de la figura con velocidad angular constante ω alrededor de un punto O, mediante un brazo de largo R, de modo que el piso de la plataforma se mantiene siempre horizontal. Al centro de la plataforma se deposita un bloque de masa m -que tiene roce nulo con la plataforma- en un momento en que el brazo de largo R está en posición horizontal.
Suponga R suficientemente pequeño como para que el bloque no choque contra los extremos de la plataforma.

(a) Encuentre el desplazamiento máximo que experimenta el bloque sobre la plataforma (distancia máxima al centro de la plataforma).

(b) Determine cuál es el valor máximo de la velocidad angular ω para que el bloque no se despegue de la plataforma.

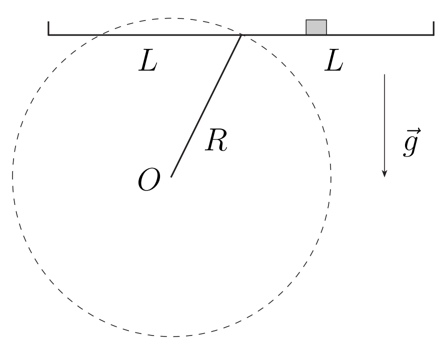

Fig. P2

Solución P2

(a) Una buena elección de S.R. es definir uno en el centro O de la circunferencia descrita por el movimiento (éste es inercial) y otro no inercial con origen en O', punto medio de la plataforma, como se muestra en la figura. Así,

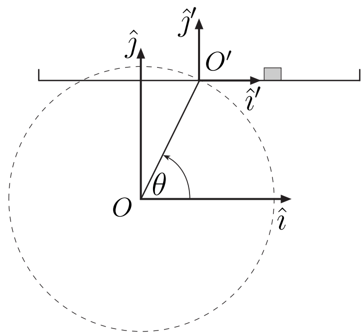

Fig. 3.6.1

$$\hat{\imath} = \hat{\imath}', \quad \hat{\jmath} = \hat{\jmath}'$$

$$\begin{aligned} \vec{R} &= R\hat{\rho} = R(\cos\theta\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath}) \\ \Rightarrow \quad \ddot{\vec{R}} &= \vec{a}_{O'} = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} \\ &= -R\omega^2(\cos\theta\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath}) \end{aligned}$$

Con esta elección de S.R:

$$\vec{\Omega} = 0, \quad y \quad \vec{r}' = x'\hat{\imath} \Rightarrow \vec{v}' = \dot{x}'\hat{\imath} \Rightarrow \vec{a}' = \ddot{x}'\hat{\imath}.$$

Notando además que $\vec{F} = N\hat{\jmath} - mg\hat{\jmath}$, la ec. de mov. para S.N.I. resulta:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\hat{\imath} &= (N - mg)\hat{\jmath} + mR\omega^2\cos\theta\hat{\imath} + mR\omega^2\operatorname{sen}\theta\hat{\jmath} \\ \Rightarrow \quad \hat{\imath}) \quad m\ddot{x} &= mR\omega^2\cos\theta \\ \hat{\jmath}) \quad N &= mg - mR\omega^2\sin\theta \end{aligned}$$

La ecuación $\hat{\imath}$) se puede integrar dos veces, con las condiciones iniciales $\dot{x}' = 0$ y $x' = 0$ (y usando también que $\theta(0) = 0$), obteniéndose:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= R\omega\operatorname{sen}\theta \\ x' &= R(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

De lo anterior se desprende que $\boxed{x'_{max} = 2R}$.

Nota. Este resultado tiene tanto de correcto como de obvio (particularmente yo no lo ví obvio cuando traté que resolverlo el año que dí el ramo...). Si se pone atención en que en el S.I. la velocidad inicial en el eje x es nula y que no hay fuerzas actuando en el eje x, entonces la posición x (en S) es constante y, por lo tanto, el desplazamiento total *DEBE* ser $2R$.

(b) Para que la partícula no se despegue se debe imponer que $N(\theta) > 0, \forall\theta$. La situación mas restrictiva ocurre cuando $\operatorname{sen}\theta = 1$, luego la condición resulta:

$$mg - mR\omega^2 > 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\omega^2 < \frac{g}{R}}$$