

Pauta P1 y P3 Control 2

FI21A - Mecánica

Prof. Nicolás Mujica

Profs. Auxs. Paulina Cecchi y Kim Hauser

Otoño 2006

P1.

- (a) Ecuaciones de movimiento en los ejes cartesianos (con y creciente hacia abajo y x hacia la derecha):

$$\hat{i})N + F_x = 0 \quad \hat{j})mg - f_r + F_y = m\ddot{y}, \quad \text{donde : } \underbrace{f_r}_{\text{roce}} = -ay \left| \vec{N} \right| \hat{j}; \quad F_{\text{resorte}} := \vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

Consideremos el ángulo α como el que se forma entre el resorte en la posición horizontal y el resorte en cualquier momento.

Viendo que: $\left| \vec{F} \right| = -k \frac{D}{\cos \alpha} \Rightarrow F_x = -k \frac{D}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha = -kD, \quad F_y = -kD \tan \alpha = -ky,$ obtenemos que $N = kD$ para todo instante, y además: $m\ddot{y} = mg - aykD - ky.$

- (b) Por Fuerzas:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= mg - aykD - ky \\ \ddot{y} &= g - \frac{aD+1}{m}ky \\ \dot{y} \frac{d\dot{y}}{dy} &= g - \frac{aD+1}{m}ky \\ y d\dot{y} &= \left(g - \frac{aD+1}{m}ky \right) dy / \int_0^y, \int_0^y \\ \Rightarrow \frac{\dot{y}^2}{2} &= gy - \frac{aD+1}{m}k \frac{y^2}{2} \\ \dot{y}^2 = 0 &\Rightarrow y_{\max} = \frac{2mg}{k(aD+1)}. \end{aligned}$$

- (b) Por Energía:

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{kD^2}{2}, \quad E_f = \frac{k}{2}(D^2 + y_{\max}^2) - mgy_{\max} \\ W_{\text{roce}} &= \int_0^{y_{\max}} -aykD \hat{j} \cdot d\vec{r} = \int_0^{y_{\max}} -aykD \hat{j} \cdot \hat{j} dy = -\frac{akDy_{\max}^2}{2} \end{aligned}$$

Como el roce es la única fuerza no conservativa que trabaja, decimos que:

$$\begin{aligned} E_f - E_i &= W_{NC} \Leftrightarrow \frac{kD^2}{2} + \frac{ky_{\max}^2}{2} - mgy_{\max} - \frac{kD^2}{2} = -\frac{akDy_{\max}^2}{2} \\ \Rightarrow y_{\max}^2 &= \frac{2mg}{k(aD+1)}y_{\max} \Leftrightarrow y_{\max} = 0 \quad \vee \quad y_{\max} = \frac{2mg}{k(aD+1)} \end{aligned}$$

, lo que entrega la solución anterior, además de la trivial $y = 0$.

- (c) Fuerzas que trabajan: \vec{F} (sólo F_y , pues $W_{F_x} = 0$), f_r , $m\vec{g}$. La normal no trabaja porque es \perp al desplazamiento en todo momento.

•

$$W_N = 0.$$

•

$$W_{f_r} = -\frac{akDy_{max}^2}{2} = -\frac{2aDm^2g^2}{k(aD+1)^2}.$$

•

$$W_{F_y} = \int_0^{y_{max}} -kydy = -\frac{ky_{max}^2}{2} = -\frac{2m^2g^2}{k(aD+1)^2}.$$

•

$$W_{mg} = \int_0^{y_{max}} mgdy = mgy_{max} = \frac{2m^2g^2}{k(aD+1)^2}.$$

P3.

(a) $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi} + (\ddot{z})\hat{k}$

Ec. Mov:

$$\hat{\phi})f_{r\hat{\phi}} = mR\ddot{\theta} + 2m\dot{R}\omega_0^2 = 0.$$

$$\hat{\rho}) - N = m\ddot{R} - mR\omega_0^2 = mR\omega_0^2$$

$$\hat{k})f_r - mg = m\ddot{z}$$

Condición para que caiga: $\ddot{z} < 0$.

$$\Leftrightarrow f_r < mg.$$

Ahora, como $f_r \leq \mu_e |\vec{N}|$, la condición límite queda:

$$\mu_e mR\omega_0^2 < mg$$

$$\Leftrightarrow \mu_e < \frac{g}{R\omega_0^2}.$$

(b)

$$\hat{k}) \Rightarrow \ddot{z} = g - \mu_d R\omega_0^2$$

$$d\dot{z} = (g - \mu_d R\omega_0^2)dt / \int_0^{\dot{z}}, \int_0^t$$

$$\Leftrightarrow dz = (g - \mu_d R\omega_0^2)t dt / \int_0^h, \int_0^{t^*}$$

$$h = \frac{g - \mu_d R\omega_0^2}{2} t^{*2} \Leftrightarrow t^* = \sqrt{\frac{2h}{g - \mu_d R\omega_0^2}}$$

- (c) Es evidente que lo importante aquí es que si el denominador $g - \mu_d R\omega_0^2 = 0$, entonces el tiempo será infinito. Pero hay que ver más y observar que la condición de (a) implica directamente que $\mu_d < \mu_e < \frac{g}{R\omega_0^2}$, i.e., el denominador no puede ser cero, lo que significa que si el movimiento vertical comenzó en algún instante (que hemos definido como $t = 0$), entonces tardará un tiempo t^* **finito** en llegar a la base.

♣ /k.h.v.