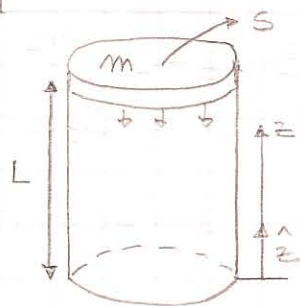


E9

Aux. GABRIEL CUEVAS 1/3



Sabemos por enunciado que se cumple:

Condición:

$$PV = \text{cte}$$

Inicialmente: $P_0 = P_a$

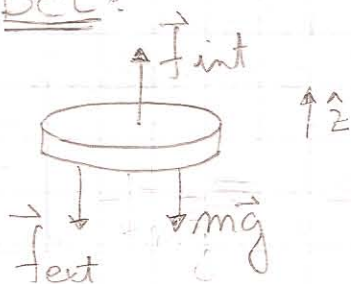
$$V_0 = LS$$

$$\Rightarrow PV = P_a LS$$

Además, para una altura z , se tiene que:

$$V(z) = zS \Rightarrow P(z) = \frac{P_a L}{z}$$

Ahora veamos el DCL del cuerpo

DCL:La f_{ext} es la presión que ejerce el medio externo por el área S :

$$f_{ext} = P_a S$$

La f_{int} es la presión que ejerce el gas dentro del tubo por el área S :

$$f_{int} = P(z)S$$

$$\Rightarrow (\hat{z}) \quad P(z)S - mg - P_a S = m \ddot{z}$$

$$\Rightarrow (4) \quad \boxed{\frac{P_a LS}{z} - mg - P_a S = m \ddot{z}}$$

Inicialmente para $z=L$, $\dot{z}=0$ Haciendo el cambio en (1) $\ddot{z} = \frac{dz}{dz} \frac{d\dot{z}}{dz}$

$$\Rightarrow \frac{P_a LS}{m} \frac{1}{z} - g - \frac{P_a S}{m} = \dot{z} \frac{d\dot{z}}{dz}$$

$$\frac{P_a LS}{m} \int_L^z \frac{dz}{z} - \left(g + \frac{P_a S}{m}\right) \int_L^z dz = \int_0^{\dot{z}} \dot{z} d\dot{z}$$

$$\frac{P_a LS}{m} \ln\left(\frac{z}{L}\right) - \left(g + \frac{P_a S}{m}\right)(z-L) = \frac{\dot{z}^2}{2}$$

$$\Rightarrow (2) \quad \dot{z}(z) = \sqrt{2} \left[\frac{P_a L S}{m} \ln\left(\frac{z}{L}\right) - \left(g + \frac{P_a S}{m}\right)(z-L) \right]^{1/2} \quad (2)$$

Para obtener una velocidad máxima debe suceder que:

$$\ddot{z} = 0, \text{ en (1)}$$

\Rightarrow

$$z^* = \frac{P_a L S}{mg + P_a S}$$

z^* en (2)

$$\dot{z}_{\text{MAX}} = \sqrt{2} \left[\frac{P_a L S}{m} \ln\left(\frac{P_a S}{mg + P_a S}\right) + \left(g + \frac{P_a S}{m}\right) \frac{mgL}{mg + P_a S} \right]^{1/2}$$

(b) Cuando el bloque alcanza su altura máxima $\dot{z} = 0$, entonces de (2) (que es la ecuación que necesitamos):

$$0 = \left[\frac{P_a L S}{m} \ln\left(\frac{z_0}{L}\right) - \left(g + \frac{P_a S}{m}\right)(z_0 - L) \right]^{1/2}$$

Donde z_0 es la altura de equilibrio.

(c) De (1) se tiene

$$\Rightarrow \ddot{z} = \frac{P_a L S}{m} \frac{1}{z} + g + \frac{P_a S}{m} = 0$$

Si $\underline{z_0}$ es nuestra posición de equilibrio, se tiene que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z_0 + (z - z_0))} = \frac{1}{z_0 \left(1 + \left(\frac{z}{z_0} - 1\right)\right)}$$

Sabemos que $z = z_0 + \delta z$, donde δz es pequeño entonces

$$\left(\frac{z}{z_0} - 1\right) = \left(\frac{z_0 + \delta z}{z_0} - 1\right) = \left(\frac{\delta z}{z_0}\right) \text{ es también pequeño}$$

de aquí podemos afirmar que

$$\frac{1}{z_0} \left(\underbrace{1 + \left(\frac{z}{z_0} - 1\right)}_{\text{pequeño}} \right)^{-1} = \frac{1}{z}$$

y ocupando que $(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$, con ϵ pequeño se puede afirmar (TAYLOR):

$$\Rightarrow \frac{1}{z} \approx \frac{1}{z_0} \left(1 + (-1) \left(\frac{z}{z_0} - 1 \right) \right)$$

Finalmente

$$\Rightarrow \frac{1}{z} \approx -\frac{z}{z_0^2} + \frac{2}{z_0}$$

En la ecuación para \ddot{z} queda:

$$\ddot{z} + \frac{PaLS}{m z_0^2} z - \frac{2PaLS}{m z_0} + g + \frac{PaS}{m} = 0$$

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA PEQUEÑAS OSCILACIONES

Para la ec. de peg. oscilaciones se debe cumplir que

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = cte$$

→ OJO CON EL SIGNO, QUE DEBE SER POSITIVO
O SI NO, TIENE UNA RESPUESTA EXPONENCIAL
QUE NO NOS SIRVE

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{PaLS}{m z_0^2}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_{peg}}$$

$$\Rightarrow T_{peg} = 2\pi z_0 \sqrt{\frac{m}{PaLS}}$$

Esta aproximación es siempre válida y es equivalente al uso del potencial.

AUXILIAR F121A

GABRIEL CUEVAS