

Problema propuesto. FI21A - Mecánica

Tema: Oscilaciones.

Prof Aux: Javier Acuña Olguín
jacuna@ing.uchile.cl

1. Problema

Un resorte de constante k , tiene adosada una partícula de masa m . La masa está en un ambiente que ejerce una fuerza de roce proporcional a la velocidad de constante b . La masa también está sujeta a una fuerza externa $\vec{F} = F_d \cos \omega_d t$. Encontrar la posición en función del tiempo.

2. Solución

$\vec{F} = m\vec{a}$ implica

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_d \cos \omega_d t$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$x(t) = \exp(-\gamma t)(A \exp(\Omega t) + B \exp(-\Omega t))$$

Con $\gamma = b/2m$ y $\Omega^2 = \gamma^2 - (k/m)^2$

La solución particular es (materia de EDO):

$$x_p(t) = \left(\frac{F/2}{-\omega_d^2 + 2i\gamma\omega_d + \omega^2} \right) e^{i\omega_d t} + \left(\frac{F/2}{-\omega_d^2 - 2i\gamma\omega_d + \omega^2} \right) e^{-i\omega_d t}.$$

$$x_p(t) = \left(\frac{F(\omega^2 - \omega_d^2)}{(\omega^2 - \omega_d^2)^2 + 4\gamma^2\omega_d^2} \right) \cos \omega_d t + \left(\frac{2F\gamma\omega_d}{(\omega^2 - \omega_d^2)^2 + 4\gamma^2\omega_d^2} \right) \sin \omega_d t.$$

La solución particular se puede encontrar expresando $\cos(\omega t) = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$, intentando una solución del estilo $Ce^{j\omega t}$ y utilizando el principio de superposición.

La solución completa es la suma de la solución homogénea y la particular. Recuerden que las condiciones iniciales se imponen a la solución completa (suma de la homogénea y la particular)