

Capítulo 2

Dinámica

2.1. Momentum lineal, fuerza y leyes de Newton

Galileo observó que cuerpos inicialmente en reposo, soltados desde la misma altura caen con movimiento uniformemente acelerado y esa aceleración es común a todos los cuerpos. Tal aceleración se denomina *aceleración de gravedad*. Si un cuerpo es soltado con velocidad inicial nula desde una altura z_0 sobre el suelo su altura posterior, como función del tiempo, es

$$z(t) = z_0 - \frac{g}{2} t^2$$

sin importar cual sea la masa del cuerpo. De lo anterior la aceleración resulta ser $\ddot{z} = -g$. Deduzca que el cuerpo llega al suelo con rapidez $\dot{z} = -\sqrt{2z_0g}$ donde el signo menos, en este caso, expresa que la velocidad es hacia abajo.

La *cantidad de movimiento* o *momentum lineal* $\vec{p}$ de una partícula de masa m y velocidad $\vec{v}$ es

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t) \quad (2.1.1)$$

La masa de un cuerpo es normalmente una cantidad fija y se mide en kilogramos, K y, salvo que específicamente se diga lo contrario, se supondrá que la masa de un cuerpo es constante.

» Sin embargo hay casos en que la masa varía. Un ejemplo muy

típico es el de un cohete que está expulsando parte de su masa, en forma de gases, para poder impulsarse.

Para percibir la cantidad de movimiento se puede experimentar dejando caer desde el reposo dos cuerpos desde la misma altura. Al recibirlos en nuestras manos y tratar de detenerlos es necesario un “mayor esfuerzo” cuando la masa del cuerpo es mayor. La razón de este mayor esfuerzo reside en que para detener el cuerpo, es decir, para hacer variar su momentum lineal desde el valor que tiene hasta cero, es necesario aplicar una fuerza.

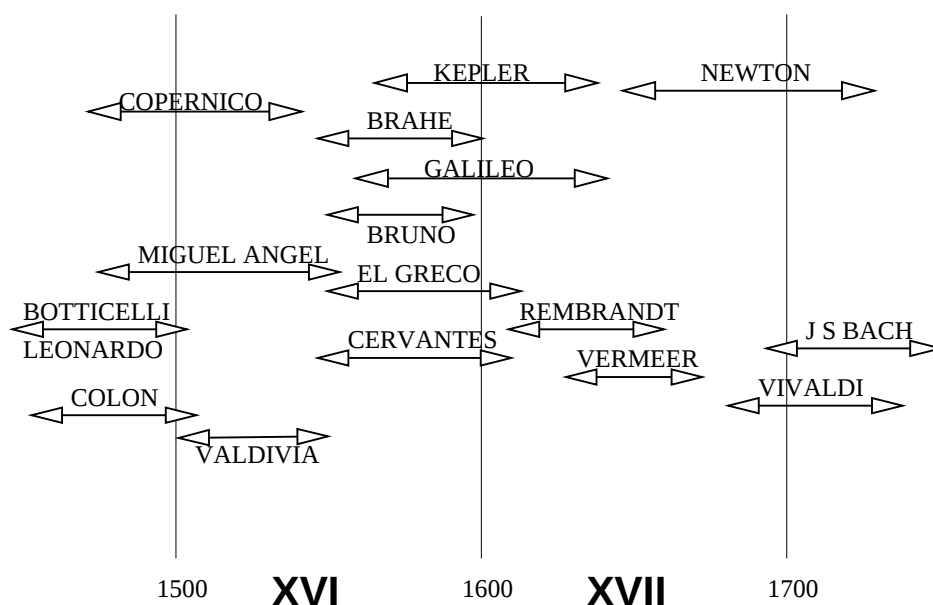


Figura 2.1: Los años en que vivieron algunos de los fundadores de la Mecánica y algunos personajes destacados en otras áreas.

Newton descubrió que la relación general entre la variación del momentum (esto es $d\vec{p}/dt$) y la fuerza total aplicada es

$$\boxed{\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}^{\text{total}}} \quad (2.1.2)$$

que se conoce como la II ley de Newton.

Un caso especial es que no haya fuerza alguna aplicada. En tal caso $d\vec{p}/dt = 0$ lo que implica que el momentum permanece constante en el tiempo. Esto implica (masa constante) que la velocidad del cuerpo no cambia y por tanto la trayectoria es rectilínea. Esta es la I ley de Newton. Un caso aun más especial es el de un cuerpo en reposo.

Inversamente, si un cuerpo tiene velocidad constante, entonces la fuerza total sobre ese cuerpo necesariamente es nula.

En (2.1.2) la fuerza es la *fuerza total*. Sobre un cuerpo pueden estar actuando muchas fuerzas simultáneamente y el lado derecho en (2.1.2) debe tener la suma vectorial de todas las fuerzas que están actuando sobre el cuerpo.

» Cuando un mozo lleva un vaso sobre una bandeja hay varias fuerzas actuando sobre ese vaso: su peso, $m\vec{g}$; una fuerza, llamada *normal* que la bandeja ejerce sobre el vaso y que es perpendicular a la superficie de contacto; otra fuerza, esta vez contenida en el plano de contacto, llamada *roce* que impide que el vaso deslice en la bandeja; también el aire ejerce una *fuerza viscosa* sobre el vaso, porque todo fluido (el aire, por ejemplo) tiende a frenar a un cuerpo que se mueve en él. La lista se podría continuar (la luna, el sol etc).

La III ley de Newton dice que si el cuerpo *A* ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre un cuerpo *B*, entonces el cuerpo *B* ejerce una fuerza $-\vec{F}$ sobre el cuerpo *A*.

» Un cuerpo en reposo sobre una mesa ejerce sobre ella su fuerza peso $\vec{F} = m\vec{g}$, la que apunta verticalmente hacia abajo, y entonces, según la III ley de Newton, la mesa ejerce sobre el cuerpo una fuerza, llamada *normal*, sobre el cuerpo, la que vale $\vec{N} = -m\vec{g}$, la cual apunta verticalmente hacia arriba. Puesto que sobre el cuerpo está además la atracción que le ejerce la Tierra (el peso), entonces la fuerza total sobre este cuerpo es nula, lo que permite entender porqué está en reposo.

Normalmente las leyes de Newton se asocian a sistemas de referencia llamados *sistemas de referencia inerciales*. Un ejemplo de sistema de referencia no inercial es un vehículo describiendo una curva. Un cuerpo dejado en reposo respecto al vehículo tiende a moverse alejándose del centro de curvatura. Más adelante se dirá que en sistemas de referencia no inerciales aparecen fuerzas especiales como es la *fuerza centrífuga* y la *fuerza*

de *Coriolis*. Genéricamente se denominará pseudofuerzas a estas fuerzas propias de los sistemas no inerciales. Pero en un sistema de referencia inercial no se presentan tales fuerzas.

2.1.1. Ejemplos de fuerzas

A continuación se hará mención de algunas fuerzas que se utiliza en estas notas. Las fuerzas que se describen a continuación serán explicadas con más detalle más adelante.

- o Peso. Sobre un cuerpo de masa m cerca de la superficie de la Tierra actúa una fuerza cuya magnitud es mg y apunta “hacia abajo”.
- o Gravitacional. La Ley Universal de Gravitación describe la fuerza de atracción gravitacional entre cuerpos masivos.
- o Coulomb. Cargas eléctricas se repelen o atraen, según la Ley de Coulomb, dependiendo si tienen signo igual o distinto.
- o Contacto. En cada punto en que dos cuerpos A y B están en contacto sólido-sólido aparece una fuerza $\vec{F}_{AB}$ sobre A debido al contacto con B (y lo mismo sobre B debido a A). Si se define el plano tangente al contacto, la fuerza $\vec{F}_{AB}$ puede ser descompuesta en forma única en la suma de dos fuerza: una perpendicular al plano de contacto y otra paralela a él. Estas dos fuerzas se denominan *fuerza normal* y *fuerza de roce*.
 - Normal. Si un cuerpo está apoyado sobre una superficie, la superficie ejerce una fuerza sobre el cuerpo que corresponde a la reacción debido a la fuerza que el cuerpo ejerce sobre la superficie. La normal es una fuerza perpendicular a la superficie de contacto.
 - Roce. Un cuerpo apoyado sobre una superficie puede ejercer una fuerza paralela a la superficie de contacto. Si la velocidad relativa entre el cuerpo y la superficie es nula se tiene la fuerza de roce estático y si la velocidad relativa entre el cuerpo y la superficie no es nula se tiene una fuerza de roce dinámico.

Otras fuerzas serán introducidas más adelante. Por el momento subrayamos que si un cuerpo está apoyado en una superficie y no hay roce entre

ambos, entonces la única fuerza sobre el cuerpo debido a este contacto es la fuerza normal.

2.1.2. Ejemplo de argolla en una vara horizontal que gira

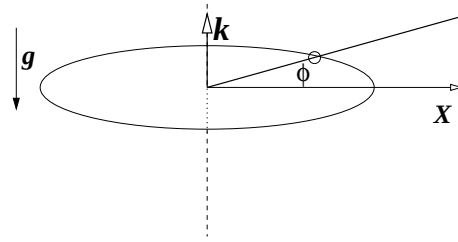


Figura 2.2: Una argolla que puede deslizarse libremente, sin roce, a lo largo de una varilla y la varilla gira barriendo con velocidad angular uniforme $\dot{\phi} = \omega$ un plano horizontal. *argolla*

Consideremos el caso de una argolla que puede deslizarse, libre de roce, a lo largo de una vara y esta vara gira barriendo un plano horizontal con velocidad angular $\dot{\phi} = \omega$ constante.

El problema será descrito con coordenadas cilíndricas y los vectores base asociados son $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ de tal forma que $\hat{k}$ es vertical hacia arriba.

La fuerza total de contacto sobre la argolla, igual que cualquier vector, puede expresarse con los vectores base:

$$\vec{F}_{\text{cont}} = f_1 \hat{\rho} + f_2 \hat{\phi} + f_3 \hat{k}$$

pero la componente en la dirección $\hat{\rho}$ representaría roce—ya que es la dirección en la que puede haber movimiento—por lo cual se debe exigir que $f_1 = 0$. Lo que resta, $f_2 \hat{\phi} + f_3 \hat{k}$ es normal a la vara y por lo tanto es la fuerza llamada normal. Las fuerzas sobre la argolla son: su propio peso $\vec{P} = -mg\hat{k}$ y la fuerza normal $\vec{N}$ que la varilla ejerce sobre la argolla. En este caso normal quiere decir ortogonal a la varilla, por lo tanto es una fuerza que ya se ha mencionado y que puede tener componentes en la dirección vertical $\hat{k}$ y también en la dirección $\hat{\phi}$. Cambiándole el nombre a las componentes de la normal, ella se puede escribir

$$\vec{N} = N_k \hat{k} + N_\phi \hat{\phi} \quad (2.1.3)$$

Puesto que la argolla no tiene movimiento horizontal, la fuerza total en esa dirección debe ser nula, es decir, $N_k \hat{k} + \vec{P} = 0$, que implica: $N_k = mg$.

Las condiciones que definen el movimiento son

$$\dot{\phi}(t) = \omega, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \dot{\rho}(0) = 0 \quad (2.1.4)$$

y, puesto que el movimiento ocurre en un plano horizontal, la aceleración tiene la forma (ver (1.2.4)),

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) \hat{\phi} \quad (2.1.5)$$

El plantear la II ley de Newton en coordenadas cilíndricas se puede separar en una componente radial y otra en la dirección de $\hat{\phi}$ lo que da lugar a dos ecuaciones escalares

$$m(2\dot{\rho}\omega) = N_{\phi} \quad (2.1.6)$$

$$\ddot{\rho} - \omega^2 \rho = 0 \quad (2.1.7)$$

Al integrar la segunda ecuación se obtiene

$$\rho(t) = \rho_0 \cosh(\omega t) \quad (2.1.8)$$

que da la forma explícita del movimiento a lo largo de la vara. Este resultado implica que ρ cambia con el tiempo y su variación está relacionada a un coseno hiperbólico. Esto implica, de (2.1.6), que N_{ϕ} no es nulo.

Al usar la forma de $\rho(t)$, obtenida en (2.1.8), en (2.1.6) se obtiene la expresión para N_{ϕ} ,

$$N_{\phi} = 2m\omega^2 \rho_0 \sinh(\omega t) \quad (2.1.9)$$

Lo que se ha deducido es que la argolla se mueve deslizándose hacia afuera de la argolla. Su distancia al centro de giro: $\rho(t)$, aumenta exponencialmente con el tiempo (en efecto, para tiempos muy grandes $\cosh(\omega t) \sim \frac{1}{2}e^{\omega t}$).

Si se intenta reproducir la situación descrita en un experimento real debemos tomar una argolla y una vara tal que haya roce insignificamente pequeño entre ambos. Con un motor controlado automáticamente se mantendría uniforme la velocidad angular ω . Descubriríamos, sin embargo, que llegaría un momento en que el motor no sería capaz de mantener constante la velocidad angular, porque la fuerza normal que debe ejercer sobre la argolla es demasiado grande ya que la componente N_{ϕ} crece exponencialmente.

2.2. Muchas partículas

2.2.1. Caso discreto

Se considera un sistema de N partículas puntuales de masas m_a , $a = 1, 2, \dots, N$, de posiciones $\vec{r}_a$, velocidades $\vec{v}_a$ y aceleraciones $\vec{a}_a$. La suma de las masas se denotará M

$$M = \sum_{k=1}^N m_a \quad (2.2.1)$$

y G será la forma para designar el *centro de masa*. La posición y la velocidad de G son

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_a \vec{r}_a \quad (2.2.2)$$

$$\vec{V}_G = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_a \vec{v}_a \quad (2.2.3)$$

Cada partícula satisface una ecuación de Newton

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \vec{F}_1 \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \vec{F}_2 \\ &\dots = \dots \\ m_N \frac{d\vec{v}_N}{dt} &= \vec{F}_N \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

que, al sumarlas dan

$$M \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{F}^{\text{total}} \quad \text{donde} \quad (2.2.5)$$

$$\vec{F}^{\text{total}} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_a \quad (2.2.6)$$

es decir, la variación del momentum total del sistema está dado por la fuerza total que actúa sobre el sistema. Vamos a ver, un poco más abajo, que esta fuerza total se debe exclusivamente a fuerzas externas al sistema.

La fuerza que ha sido llamada $\vec{F}_a$ es la fuerza total sobre la a -partícula y puede descomponerse en la suma de las fuerzas que le ejercen las otras

partículas del sistema, que llamaremos $\vec{f}_a^{\text{int}}$ y la suma de las fuerzas externas $\vec{f}_a^{\text{ext}}$ que actúan sobre la partícula a ,

$$\vec{F}_a = \vec{f}_a^{\text{ext}} + \vec{f}_a^{\text{int}} \quad (2.2.7)$$

A su vez $\vec{f}_a^{\text{int}}$ está compuesta de las fuerzas $\vec{F}_{ab}$ que cada partícula b ejerce sobre a ,

$$\vec{f}_a^{\text{int}} = \sum_{b=1, b \neq a}^N \vec{F}_{ab} \quad (2.2.8)$$

donde automáticamente la fuerza que una partícula ejerce sobre si misma es nula,

$$\vec{F}_{bb} \equiv 0 \quad (2.2.9)$$

Siempre se va a suponer que la fuerza $\vec{F}_{ab}$ entre dos partículas puntuales es paralela a la línea que une ambos puntos.

A continuación se argumenta, a partir de (2.2.6), que las fuerzas internas no contribuyen a la fuerza total. En efecto, al calcular la contribución de las fuerzas internas se tiene

$$\sum_{a=1}^N \vec{f}_a^{\text{int}} = \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \vec{F}_{ab} \quad (2.2.10)$$

pero por cada sumando $\vec{F}_{ab}$ hay otro que es $\vec{F}_{ba}$ y el principio de acción y reacción establece que $\vec{F}_{ba} = -\vec{F}_{ab}$, lo que determina que la suma anterior sea nula. En resumen,

$$\vec{F}^{\text{total}} = \sum_a \vec{f}_a^{\text{ext}} \quad (2.2.11)$$

y por tanto la ecuación de movimiento para el centro de masa G del sistema es

$$M \frac{dV_G}{dt} = \sum_a \vec{f}_a^{\text{ext}} \equiv \vec{F}^{\text{ext}} \quad (2.2.12)$$

Corolario: si sobre un sistema de partículas no están actuando fuerzas externas, el centro de masa se mueve con velocidad uniforme.

♠ *Estudie el movimiento del centro de masa del sistema compuesto por dos partículas masivas unidas por un hilo, que rotan en torno a su centro de masa y están en vuelo libre en presencia de gravedad $\vec{g}$.*

2.2.2. Caso continuo

Es posible generalizar la descripción de sistemas de muchas partículas al caso de sistemas continuos. Esta idea se ilustra en lo que sigue a través de un ejemplo.

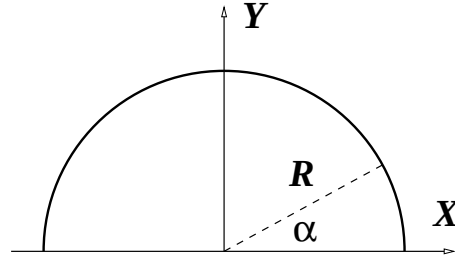


Figura 2.3: Un alambre semicircular con densidad lineal de masa $\lambda = \frac{M}{\pi R}$.

Se considera un alambre semicircular de radio R y densidad lineal $\lambda = \frac{M}{\pi R}$ centrado en el origen como lo muestra la figura 2.3. En un caso continuo se reemplaza la suma sobre el índice a por una integral. Así, entonces, en lugar de $M = \sum_a m_a$ se debe escribir

$$M = \int \lambda ds$$

donde $ds = R d\alpha$ es el elemento de arco. Puesto que en este ejemplo la densidad λ es una constante, la integral sobre α desde 0 a π es sencilla y da el resultado correcto. La expresión (2.2.2) para determinar la posición del centro de masa se generaliza en la forma

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

donde $dm = \lambda ds = \frac{M}{\pi R} R d\alpha = \frac{M}{\pi} d\alpha$. Por otro lado, el vector $\vec{r}$ que recorre la semicircunferencia es $\vec{r} = R (\hat{i} \cos \alpha + \hat{j} \sin \alpha)$. Al integrar en $\alpha \in [0, \pi]$, el término $\cos \alpha$ da cero y el término $\sin \alpha$ da 2, por lo cual

$$\vec{R}_G = \frac{2R}{\pi} \hat{j} \approx 0,64R \hat{j}$$

♠ Haga un cálculo similar pero para el caso de una lámina semicircular de radio R . Ayuda: ahora la densidad es masa por unidad de superficie, $\sigma = M/(2\pi R^2)$ y se debe integrar un elemento de área: $dS = R dp d\alpha$, integrando tanto en $p \in [0, R]$ como en $\alpha \in [0, \pi]$.

2.3. Momento Angular y Torque

2.3.1. Ecuaciones generales

Así como el momentum lineal es una medida de la cantidad de movimiento de traslación, el *momento angular*, $\vec{\ell}_O$, es—en cierto modo—la cantidad de movimiento de rotación *en torno a un punto* O . Formalmente se define como la suma de los productos cruz entre las posiciones y los respectivos momentos lineales

$$\vec{\ell}_O(t) = \sum_a \vec{r}_a(t) \times \vec{p}_a(t) \quad (2.3.1)$$

Por ejemplo, en el caso de la figura 1.6 (caso de una sola partícula), $\vec{r} = b\hat{j} + \hat{i}v_0t$ y el momentum es $\vec{p} = mv_0\hat{i}$, por lo que el momento angular del ejemplo es $\vec{\ell}_O = -mbv_0\hat{k}$.

♣ *Calcule el momento angular $\vec{\ell}_O$ de una partícula que gira con velocidad angular uniforme en torno al punto O describiendo una circunferencia de radio R .*

Por su propia definición el momento angular de una sola partícula “1” apunta en una dirección que es perpendicular al plano que definen $\vec{r}_1$ y $\vec{p}_1$. Esta dirección está relacionada al eje de giro del punto móvil con respecto al punto O en un instante determinado. En general la dirección de ese eje va cambiando con el tiempo.

» Se tiene dos ruedas de bicicleta de igual geometría —montadas sobre ejes fijos—girando a igual velocidad angular. La primera es una rueda normal mientras que la otra tiene plomo en lugar de aire en su cámara. Al tratar de detenerlas se notará que se requiere de más esfuerzo para detener a la rueda con plomo. Esto se debe a que es más difícil llevar hasta cero el momento angular de un objeto que actualmente tiene momento angular más grande.

Si se toma la derivada con respecto al tiempo del momento angular, y se supone que las masas son contantes, se obtiene

$$\frac{d\vec{\ell}_O}{dt} = \sum_a \frac{d(\vec{r}_a \times \vec{p}_a)}{dt} = \sum_a \frac{d\vec{r}_a}{dt} \times \vec{p}_a + \sum_a \vec{r}_a \times \frac{d\vec{p}_a}{dt} \quad (2.3.2)$$

El primer término del lado derecho es cero porque cada sumando es proporcional a $\vec{v}_a \times \vec{v}_a$ y el último término se puede escribir sencillamente

$\vec{r}_a \times \dot{\vec{p}}_a$, es decir,

$$\frac{d\vec{\ell}_O(t)}{dt} = \sum_a \vec{r}_a(t) \times \vec{F}_a^{\text{total}} \quad (2.3.3)$$

Para escribir esta última expresión se hizo uso de la segunda ley de Newton, (2.1.2). El lado derecho de la expresión anterior es lo que se conoce como *torque total* $\vec{\tau}_O$ que producen las fuerzas $\vec{F}_a$ sobre el sistema de partículas,

$$\vec{\tau}_O^{\text{total}} = \sum_a \vec{r}_a(t) \times \vec{F}_a^{\text{total}} \quad (2.3.4)$$

y por tanto

$$\boxed{\frac{d\vec{\ell}_O(t)}{dt} = \vec{\tau}_O^{\text{total}}} \quad (2.3.5)$$

que quiere decir que la variación del momento angular se debe a la acción del torque total que actúa sobre el sistema.

Para estudiar la dinámica del momento angular se debe ver el valor del torque total y la forma de descomponerlo. El torque total $\vec{\tau}_O$ es la suma del torque de las fuerzas externas y el de las fuerzas internas. Demostremos que este último es nulo. Como la suma no depende del nombre de los índices, se la puede escribir intercambiando el papel de a y b . Luego se suma ambas sumatorias y se divide por dos,

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_O^{\text{int}} &= \sum_{a,b} \vec{r}_a \times \vec{F}_{ab} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a,b} \vec{r}_a \times \vec{F}_{ab} + \frac{1}{2} \sum_{a,b} \vec{r}_b \times \vec{F}_{ba} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a,b} (\vec{r}_a - \vec{r}_b) \times \vec{F}_{ab} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

es decir

$$\vec{\tau}_O = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \quad (2.3.7)$$

El torque total sobre un sistema depende tan solo de las fuerzas que son externas al sistema.

» Los frenos, en un vehículo ejercen torque sobre las ruedas, el motor también.

Si para un sistema el torque de la fuerza total es nulo, entonces el momento angular tiene derivada temporal nula, es decir, es constante.