

2) Una masa m de un material a temperatura T_1 se mezcla adiabática e isobáricamente con otra masa igual a temperatura T_2 . Suponiendo que la capacidad térmica es aproximadamente constante, calcule la variación de entropía del universo local y verifique explícitamente que es positiva.

Sol. La temperatura final del conjunto T_f se determina por primera ley: para el sistema aislado (1U2): $\Delta E=Q+W=0$, como además $W=0$ debe ser $Q=Q_1+Q_2=0$, donde Q_1 y Q_2 son energías ingresadas térmicamente a las masas 1 y 2, respectivamente. Puesto que C_p es constante: $C_p(T_f - T_1) + C_p(T_f - T_2) = 0$, de donde $T_f = (T_1+T_2)/2$, resultado al que también se puede llegar apelando a la simetría del problema. (1.5 pts)

El proceso no es reversible, por lo que se inventa un proceso reversible que lleve a la masa 1 desde T_1 hasta T_f , proceso que es isobárico. Luego:

$$dS_1 = q_1/T_1 = C_p dT_1/T_1 \quad \text{y} \quad \Delta S_1 = C_p \ln(T_{1\text{final}}/T_{1\text{inicial}}) = C_p \ln[(T_1+T_2)/2T_1]$$

De manera análoga para la masa 2: $\Delta S_2 = C_p \ln[(T_1+T_2)/2T_2]$

La variación de entropía del universo local es el

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C_p \ln[(T_1+T_2)/2T_1] + C_p \ln[(T_1+T_2)/2T_2]$$

$$= C_p \ln[(T_1+T_2)^2/4T_1T_2]. \quad (3.5 \text{ pts})$$

Este valor es positivo si el argumento del logaritmo es mayor que la unidad.

Pero $(T_1+T_2)^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 > 4T_1T_2$ se suma $4T_1T_2$ a ambos lados, quedando

$$T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 > 4T_1T_2$$

$$\text{o bien } (T_1+T_2)^2 > 4T_1T_2$$

que justamente equivale a $(T_1+T_2)^2/4T_1T_2 > 1$ (1 pto)

P3.

i) $P_1 = 101300 \text{ Pa}$ (atmósfera estándar)

V_1 se determina de $P_1V_1 = RT_1$

$$V_1 = R \times 300\text{K} / P_1 = 0,0246 \text{ m}^3$$

$$T_1 = 300\text{K}$$

$$V_2 = 0,2V_1 = V_1/5 = 0,00492 \text{ m}^3$$

P_2 se determina de la condición $P_1V_1^g = P_2V_2^g$,

$$P_2 = (V_1/V_2)^g P_1 = (5)^g P_1 = 5^{5/3} P_1 = 1,481 \times 10^6 \text{ Pa}$$

T_2 se determina de la ecuación de estado

$$T_2 = P_2V_2/R = 5^{5/3} P_1(V_1/5)/R = 5^{2/3} P_1V_1/R = 5^{2/3} T_1 = 2,92T_1 = 877\text{K}$$

Por enunciado $V_3 = V_2 = V_1/5 = 0,00492 \text{ m}^3$

Por enunciado $P_3 = 2P_2 = 2 \times 5^{5/3} P_1 = 2,96 \times 10^6 \text{ Pa}$

$$\text{Luego } T_3 = P_3V_3/R = 2 \times 5^{5/3} P_1V_1/5R = 2 \times 5^{2/3} P_1V_1/R = 2 \times 5^{2/3} T_1 = 1745\text{K}$$

Por enunciado $V_4 = V_1 = 0,0246 \text{ m}^3$

P_4 se obtiene de $P_3V_3^g = P_4V_4^g$, $P_4 = (V_3/V_4)^g P_3 = (1/5)^g P_3$

$$= 5^{-5/3} P_3 = 5^{-5/3} \times 2 \times 5^{5/3} P_1 = 2P_1 = 202600\text{Pa} = 2,026 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_4 = P_4V_4/R = 2P_1V_1/R = 2T_1 = 600\text{K}$$

Calculo de estados 0.5 puntos (particularmente de las temperaturas que son las usadas en el problema)

El calor es cero en las ramas adiabáticas 1->2 y 3->4, por definición de adiabático. 0,6 puntos.

Las otras ramas son isocóricas y el calor se calcula como $Q_V = C_V \Delta T$ con $C_V = 3R/2 = 12,5 \text{ J/K}$. Así:

$$\begin{array}{l} \text{Rama } 2 \rightarrow 3 \quad Q_{23} = C_V(T_3 - T_2) \quad = 10825 \text{ J} \quad > 0 \\ \text{Rama } 4 \rightarrow 1 \quad Q_{41} = C_V(T_1 - T_4) \quad = -3750 \text{ J} \quad < 0 \quad 0.9 \text{ puntos} \end{array}$$

ii) El calor total es $Q = 10963 - 3750 \text{ J} = 7213 \text{ J} > 0$

Para el ciclo $E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = Q + W = 0$ y se despeja $W = -Q = -7213 \text{ J}$. (1 Punto)

La alternativa de calcular W rama por rama, aunque altamente inconveniente, es válida, **siempre que no haya errores y que se cumpla $Q + W = 0$** .

iii) Entropías

En las ramas adiabáticas $\Delta S_{12} = \Delta S_{34} = 0$ (0.6 puntos)

En las ramas isocóricas reversibles se aplica $dS = q_V/T = C_V dT/T$

Como C_V es constante $\Delta S = C_V \ln(T_f/T_i)$.

Luego

$$\Delta S_{23} = C_V \ln(T_3/T_2) = (3R/2) \ln(1745/877) = 12,5 (0,688) = 8,60 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{41} = C_V \ln(T_1/T_4) = (3R/2) \ln(300/600) = 12,5 (-0,693) = -8,66 \text{ J/K} \quad (1.4 \text{ ptos})$$

iv) $\Delta S_{\text{ciclo}} = 8,6 - 8,66 \text{ J/K} = -0,06 \text{ J/K}$ valor más o menos cercano a cero según la precisión de los cálculos (1 punto). **Resultado debe ser consecuente con lo hecho en la parte (iii) en relación al cálculo de entropías.**