Problema 1.

Un trompo simétrico de masa m cuyos momentos principales de Inercia en su púa son $C = \frac{1}{2}mh^2$, $A = \frac{3}{4}mh^2$ se coloca en movimiento de modo que inicialmente $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = s = \sqrt{\frac{g}{h}}$. Aquí h es la distancia desde la púa hasta el centro de masas. Determine

a. Los valores extremos de la inclinación del eje del trompo

b. El mínimo valor de la magnitud de la velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$.

Solución:reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} \alpha &= A\dot{\phi}\sin^2\theta + Cs\cos\theta = \frac{13}{16}mh^2\sqrt{\frac{g}{h}} && \text{(1 p)} \\ 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2\sin^2\theta + A\dot{\theta}^2 + 2mgh\cos\theta = \frac{25}{16}mhg && \text{(1 p)} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 &= f(u) = (\frac{25}{16}mhg - 2mghu)\frac{1-u^2}{\frac{3}{4}mh^2} - \left(\frac{\frac{13}{16}mh^2\sqrt{\frac{g}{h}} - \frac{1}{2}mh^2\sqrt{\frac{g}{h}}u}{\frac{3}{4}mh^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{144}\frac{g}{h}(2u-1)(192u^2 - 86u - 131) && \text{(1 p)} \\ u_1 &= \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = 60^o && \text{(0,5 p)} \\ u_2 &= \frac{43}{192} - \frac{1}{192}\sqrt{27\,001} = -0.632 \Rightarrow \theta_2 = 129^o && \text{(0,5 p)} \end{aligned}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\frac{13}{4} - 2\cos\theta}{3\sin^2\theta}\sqrt{\frac{g}{h}}$$

$$f(u) = \frac{\frac{13}{4} - 2u}{3(1-u^2)}$$

tiene un mínimo en $u = 0.344$ (por derivadas) y resulta

$$\dot{\phi}_{\min} = 0.969\sqrt{\frac{g}{h}} \qquad \text{(2 p)}$$

Problema 2.

Respecto a la figura. Se dan como datos

$$h = \frac{3R}{8}, \quad I_G = \frac{83}{320}MR^2, \quad \dot{\theta}(0) = \Omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} x_G &= x + h\sin\theta \Rightarrow \dot{x}_G = \dot{x} + h\dot{\theta}\cos\theta \\ y_G &= R - h\cos\theta \Rightarrow \dot{y}_G = h\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

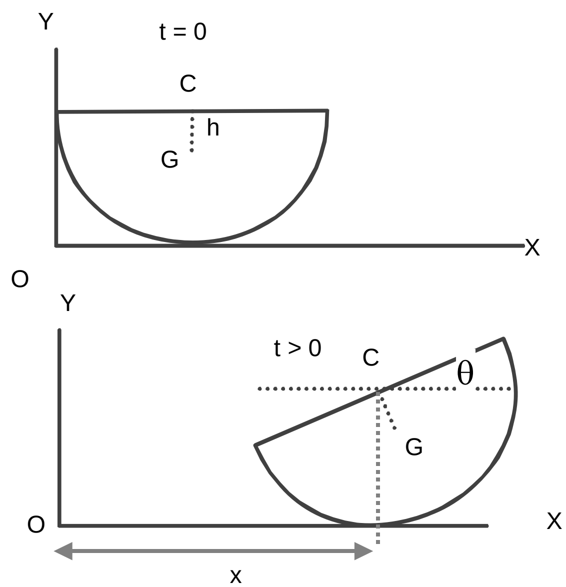


Figure 1:

Luego

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + 2\dot{x}h\dot{\theta}\cos\theta + h^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + Mgh\cos\theta, \qquad \text{(1 p)}$$

haciendo algunas derivadas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= M(\dot{x} + h\dot{\theta}\cos\theta), \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= M\dot{x}h\cos\theta + Mh^2\dot{\theta} + I_G\dot{\theta}, \\
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -M\dot{x}h\dot{\theta}\sin\theta - Mgh\sin\theta,
\end{aligned}$$

entonces las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(M(\dot{x} + h\dot{\theta}\cos\theta)) &= 0, && \text{(1 p)} \\
M\ddot{x}h\cos\theta + Mh^2\dot{\theta} + I_G\dot{\theta} + Mgh\sin\theta &= 0, && \text{(1 p)}
\end{aligned}$$

las cantidades conservadas y sus valores son

$$
\begin{aligned}
p_x &= M(\dot{x} + h\dot{\theta}\cos\theta) = M(V_0 + \frac{3}{8}\sqrt{gR}), && \text{(1 p)}\\
H &= E = \frac{1}{2}M(V_0^2 + h^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - Mgh\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}MV_0^2 - \frac{7}{40}MRg && \text{(1 p)}
\end{aligned}
$$

Para obtener el máximo de θ, hacemos $\dot{\theta} = 0$, resultando

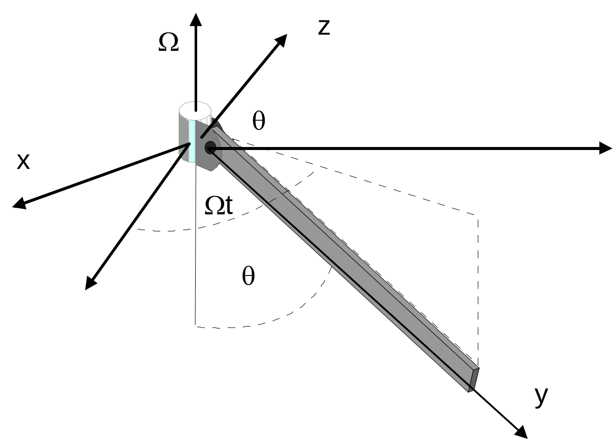
$$g\frac{3}{8}(1 - \cos\theta) = \frac{1}{5}R\Omega^2.$$

$$\Omega^2 = \frac{g}{R}$$

$$1 - \frac{8}{15} = \cos\theta \Rightarrow \theta = 62.4^o \qquad \text{(1 p)}$$

Problema 3.

Con respecto a la figura x es horizontal y perpendicular a la barra en su extremo fijo, y a lo largo de la barra, z perpendicular a los anteriores.



la velocidad angular es

$$
\begin{aligned}
\vec{\omega} &= \dot{\theta}\hat{\imath} + \Omega(\sin\theta\hat{k} - \cos\theta\hat{\jmath}) \\
I_{xx} &= I_{zz} = \frac{1}{3}ML^2, \quad I_{yy} = 0
\end{aligned}
$$

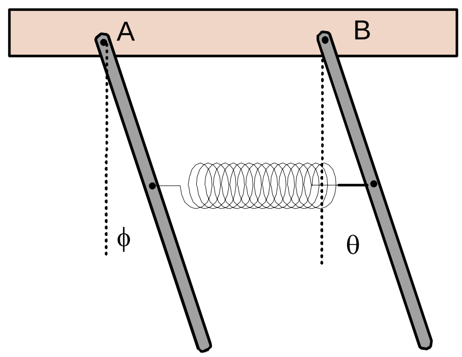
luego

$$L = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\Omega^2\sin^2\theta + Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

de aquí, la ecuación de movimiento es

$$\ddot{\theta} = \Omega^2 \cos\theta \sin\theta - \frac{3g}{2L}\sin\theta$$

Problema 4



I) **Solución con matrices**

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2 \\ V &= -Mg\frac{L}{2}\cos\phi - Mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k(\frac{L}{2}\theta - \frac{L}{2}\phi)^2 \simeq \\ & Mg\frac{L}{4}\phi^2 + Mg\frac{L}{4}\theta^2 + \frac{1}{8}kL^2(\theta-\phi)^2 \end{aligned}$$

Para oscilaciones pequeñas

$$L \simeq \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2 - Mg\frac{L}{4}\phi^2 - Mg\frac{L}{4}\theta^2 - \frac{1}{8}kL^2(\theta-\phi)^2 \qquad (1\text{ p})$$

De allí las matrices **K** y **V** son ($\eta_1 = \phi, \eta_2 = \theta$)

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}ML^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ML^2 \end{pmatrix}, & (1\text{ p}) \\ \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{4}kL^2 & -\frac{1}{4}kL^2 \\ -\frac{1}{4}kL^2 & Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{4}kL^2 \end{pmatrix}, & (1\text{ p}) \end{aligned}$$

por lo cual los valores propios satisfacen

$$\det\left(\omega^2\begin{pmatrix} \frac{1}{3}ML^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ML^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{4}kL^2 & -\frac{1}{4}kL^2 \\ -\frac{1}{4}kL^2 & Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{4}kL^2 \end{pmatrix}\right) = 0 \qquad (1\text{ p})$$

$$\left(\omega^2 - \frac{3g}{2L}\right)\left(-\omega^2 + \frac{3k}{2M} + \frac{3g}{2L}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{3g}{L}\\ \omega_2^2 &= \frac{3}{2}\frac{g}{L}+\frac{3k}{2M}\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones lineales es

$$\omega^2\begin{pmatrix}\frac{1}{3}ML^2 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}ML^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Mg\frac{L}{2}+\frac{1}{4}kL^2 & -\frac{1}{4}kL^2\\ -\frac{1}{4}kL^2 & Mg\frac{L}{2}+\frac{1}{4}kL^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix},$$

Para las dos frecuencias propias se obtiene

$$\begin{aligned}a_{11} &= a_{21}\\ a_{12} &= -a_{22}\end{aligned}$$

y de allí salvo normalización irrelevante las coordenadas normales y frecuencias propias son

$$\xi_1 = \phi+\theta:\quad \omega_1^2=\frac{3g}{L} \qquad (1\text{ p})$$

$$\xi_2 = \phi-\theta:\quad \omega_2^2=\frac{3}{2}\frac{g}{L}+\frac{3k}{2M} \qquad (1\text{ p})$$

II) **En otra forma (la forma simple)**

$$L\simeq\frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2-Mg\frac{L}{4}\phi^2-Mg\frac{L}{4}\theta^2-\frac{1}{8}kL^2(\theta-\phi)^2. \qquad (1\text{ p})$$

Ecuaciones de Lagrange

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot{\phi}+\frac{1}{2}MgL\phi-\frac{1}{4}kL^2\theta+\frac{1}{4}kL^2\phi = 0 \qquad (1\text{ p})$$

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta}+\frac{1}{2}MgL\theta+\frac{1}{4}kL^2\theta-\frac{1}{4}kL^2\phi = 0 \qquad (1\text{ p})$$

Sumando

$$\frac{1}{3}ML^2(\ddot{\phi}+\ddot{\theta})+MgL(\phi+\theta)=0 \qquad (1\text{ p})$$

restando

$$\frac{1}{3}ML^2(\ddot{\phi}-\ddot{\theta})+(\frac{1}{2}MgL+\frac{1}{2}kL^2)(\phi-\theta)=0 \qquad (1\text{ p})$$

o sea

$$\xi_1 = \phi+\theta:\quad \omega_1^2=\frac{3g}{L} \qquad (0.5\text{ p})$$

$$\xi_2 = \phi-\theta:\quad \omega_2^2=\frac{3}{2}\frac{g}{L}+\frac{3k}{2M} \qquad (0.5\text{ p})$$